

Verfahren mit adaptiver Symbolauslöschung zur iterativen Detektion codierter MIMO-Signale

Von der
Fakultät Informatik, Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Alexander Boronka

aus Bietigheim

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. J. Speidel
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. B. Yang
Tag der mündlichen Prüfung:	8. November 2004

Institut für Nachrichtenübertragung der Universität Stuttgart
2005

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. Joachim Speidel, danke ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und die Arbeitsmöglichkeiten an seinem Institut. Sein reges Interesse, seine ständige Gesprächsbereitschaft und seine vielen fachlichen Hinweise haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bin Yang danke ich recht herzlich für die Übernahme des Mitberichts und seinen zahlreichen Anregungen.

Weiter danke ich den Institutsmitarbeitern und -mitarbeiterinnen (vor allem auch dem technischen Support), die meine Arbeit in vielfältiger Weise unterstützt haben. Den von mir betreuten Studien- und Diplomarbeitern danke ich für ihren Einsatz und die erfolgreiche Zusammenarbeit, wobei ich besonders die Arbeiten der Herren Efinger, Rankl und Muhammad erwähnen möchte.

Mein tiefer Dank gilt meiner lieben Ehefrau Ramona, die mich in ausgezeichneter Weise unterstützt und ermutigt hat.

Mein größter Dank und alle Ehre gilt jedoch demjenigen, der mir in allem und jederzeit am meisten geholfen hat – meinem Vater im Himmel.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen	xi
Formelzeichen	xiii
Kurzfassung	xix
Abstract	xix
1 Einleitung	1
2 MIMO-Übertragungsmodell und Systemvoraussetzungen	5
2.1 Kanalmodell	5
2.2 Sender	7
2.3 Empfänger	11
2.3.1 Der MIMO-Detektor	13
2.3.2 Der MAP-Soft-Input-Soft-Output-Demapper	14
2.3.3 Die iterative Decodierung	15
2.3.4 Das uncodierte MIMO-Übertragungssystem	16
3 Empfängerstrukturen für MIMO-Systeme	17
3.1 Zero-Forcing-Entzerrung	18
3.1.1 Gleiche Anzahl von Sendern und Empfängern	18
3.1.2 Ungleiche Anzahl von Sendern und Empfängern	20
3.1.2.1 Die Pseudoinverse	21
3.1.3 Das detektionsgefilterte Rauschen	22

3.2	Zero-Forcing-Entzerrung mit sequentieller Symbolauslöschung	24
3.2.1	Das reduzierte MIMO-System	27
3.2.2	Einführung von Indexmengen	30
3.2.3	Die optimale Detektionsreihenfolge bei ZF	32
3.3	MMSE-Entzerrung	36
3.3.1	Intrasymbolvektorinterferenz bei der MMSE-Detektion	38
3.3.2	Die Varianz der Intrasymbolvektorinterferenz	39
3.4	MMSE-Entzerrung mit Anwendung der sequentiellen Symbolauslöschung .	41
3.4.1	Berücksichtigung der durch falsche Symbolauslöschung (SAL) hervorgerufenen Störung	41
3.4.2	Die Varianz der SAL-Störung	43
3.4.3	Die optimale Detektionsreihenfolge bei der MMSE-Detektion . . .	44
3.5	Schwellwertentscheidungsbasierte Symbolauslöschung	45
3.5.1	Die Qualität der Symbolauslöschung	46
3.5.2	Die Schwellwertentscheidung	48
3.5.3	Erweiterung der Indexmengen	48
3.5.4	Die optimale Entscheiderschwelle	50
3.5.4.1	Bestimmung mit Hilfe von EXIT-Charts	52
3.5.4.2	Bestimmung über die Analyse von Histogrammen	52
3.5.5	Effiziente Berechnung der Detektionsvektoren	53
3.5.6	Berechnungsaufwand bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung	57
3.6	Das Optimum: MAP-Detektion	58
3.6.1	Berechnungskomplexität	59
3.7	Einige weitere Detektionsmöglichkeiten	61
4	Iterative Detektoren	63
4.1	Iterationsmöglichkeiten unter Beibehaltung der bisherigen Empfängerstruktur	63
4.1.1	Iteration über den Demapper	64
4.1.1.1	Kombination von Mapping und Codierer	65

4.1.2	Iteration über die Symbolauslöschung	67
4.1.3	Iteration über den MIMO-Detektor	69
4.1.3.1	Schwellwertentscheidung in den Iterationen	70
4.1.3.2	Abhängigkeit des optimalen Schwellwertes $\mathcal{R}_{\text{th,opt}}$ von der a priori Information	71
4.2	Iterationen bei anderen Empfängerstrukturen	72
4.2.1	MAP-Iteration	72
4.2.2	Einige weitere Iterationsmöglichkeiten	74
4.2.2.1	Iteration innerhalb der Detektionsstufe	74
4.2.2.2	Iteration über verkettete Codes / Ausblick	75
5	Zusammenfassung	77
A	Mathematische Herleitungen	79
A.1	Beweis der Nullvektor-Eigenschaften der Pseudoinversen	79
A.2	Anwendung des Matrix-Inversions-Lemmas	80
A.3	Beweis für reelle \tilde{h}_{jj} in Gleichung (3.87)	81
A.4	Bestimmung der optimalen Detektionsreihenfolge	82
A.5	Berechnung der Varianz der durch falsche Symbolauslöschung (SAL) her- vorgerufenen Störung	85
A.5.1	Suboptimum beim „uncodierten“ System	87
	Literaturverzeichnis	88

Abkürzungen

APP	<i>a posteriori probability</i>
AWGN	<i>additive white Gaussian noise</i> , additives weißes Gaußsches Rauschen
BCJR	Benannt nach den Anfangsbuchstaben der Nachnamen der Erfinder: Bahl, Cocke, Jelinek und Raviv
BER	<i>bit error ratio</i> , Bitfehlerhäufigkeit
BPSK	<i>binary phase shift keying</i> , binäre Phasenumtastung
EXIT	<i>extrinsic information transfer</i> , extrinsische Informationsübergabe
ICI	<i>inter channel interference</i> , Interkanalinterferenz
ISI	<i>inter symbol interference</i> , Intersymbolinterferenz
ISVI	Intrasymbolvektorinterferenz
L	<i>log-likelihood</i>
LAN	<i>local area network</i> , Nahbereichsnetz
LLR	<i>log-likelihood ratio</i>
MAP	<i>maximum a posteriori probability</i>
ML	<i>maximum likelihood</i>
QAM	<i>quadrature amplitude modulation</i> , Quadratur-Amplitudenmodulation
okt	oktale Notation
QPSK	<i>quaternary phase shift keying</i> , quaternäre Phasenumtastung
MIMO	<i>multiple input multiple output</i> , Vielfacheingang Vielfachausgang
MISO	<i>multiple input single output</i> , Vielfacheingang Einfachausgang
MMSE	<i>minimum mean squared error</i> , minimaler mittlerer quadratischer Fehler
OSIC	<i>ordered successive interference cancellation</i> , geordnete sukzessive Interferenzsubtraktion
PSK	<i>phase shift keying</i> , Phasenumtastung
S/P	Seriell/Parallel-Wandlung
SAL	Symbolauslöschung
SIMO	<i>single input multiple output</i> , Einfacheingang Vielfachausgang
SISO	<i>single input single output</i> , Einfacheingang Einfachausgang
SNR	<i>signal to noise ratio</i> , Signal-Rausch-Verhältnis
V-BLAST	<i>Vertical Bell Laboratories Layered Space-Time</i>
ZF	<i>zero-forcing</i>

Formelzeichen

$(\cdot)^T$	transponiert
$(\cdot)^*$	konjugiert-transponiert
$(\cdot)^{-1}$	inverse Matrix
$(\cdot)^\dagger$	Pseudoinverse
$(\cdot)^\#$	Kehrwertbildung und transponiert
$(\cdot)_{\overline{\mathcal{B}}}$	Matrix, bei der die Spalten, deren Indizes in \mathcal{B} enthalten sind, zu Null gesetzt werden oder Vektor, bei dem die entsprechenden Einträge zu Null gesetzt werden
$(\cdot)_{\underline{\mathcal{B}}}$	Matrix, bei der die Spalten, deren Indizes in \mathcal{B} enthalten sind, gelöscht werden oder Vektor, bei dem die entsprechenden Einträge gelöscht werden
$\overline{\mathcal{B}}(\cdot)$	Matrix, bei der die Zeilen, deren Indizes in \mathcal{B} enthalten sind, zu Null gesetzt werden
$\underline{\mathcal{B}}(\cdot)$	Matrix, bei der die Zeilen, deren Indizes in \mathcal{B} enthalten sind, gelöscht werden
$ \cdot $	Betrag
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm eines Vektors
\forall	Zeichen von <i>für alle</i> (Allquantor)
$*$	Faltungsoperator
$[\cdot]$	Komposition einer neuen Matrix aus Matrizen und/oder Vektoren
$\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$	Differenzmenge \mathcal{X} ohne \mathcal{Y} ; alle Elemente, die in der Menge \mathcal{X} und gleichzeitig nicht in der Menge \mathcal{Y} enthalten sind
α	inverses SNR
\mathbf{a}	beliebiger Vektor
\mathcal{A}	Bezeichnung des Konstellationsdiagramms
A	beliebige Matrix
A_1	a priori Information vor dem MIMO-Detektor beziehungsweise Demapper
A_2	a priori Information vor dem APP-Decoder
b	Bit
b_l	Das l -te Bit eines Symbols
\mathbf{b}	beliebiger Vektor
\mathcal{B}	beliebige Indexmenge
B	beliebige Matrix
$\text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Kovarianzmatrix zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
\mathbb{C}^M	M -dimensionaler komplexwertiger Raum

\mathcal{C}_{d_μ}	Indexmenge derjenigen Symbole, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind und subtrahiert werden
$\overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}$	Indexmenge derjenigen Symbole, die nach dem μ -ten Detektionsschritt noch nicht detektiert worden sind und zusätzlich diejenigen Symbole, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind, aber nicht subtrahiert werden
C	beliebige Matrix
$\delta(t)$	Dirac-Impuls
δ_{lj}	Kronecker-Symbol
Δ	Quadrat der Euklidischen Norm eines Vektors
$\Delta_{\mathcal{H}}$	Quantisierungsstufe im Histogramm \mathcal{H}
d_j	Index für die Sendesymbole; besonders dann, wenn sie in einer bestimmten Reihenfolge detektiert werden. Speziell d_μ für das Symbol, das im μ -ten Detektionsschritt detektiert wird
\det	Determinante
$\text{diag}(\cdot)$	Vektor, der die Diagonalelemente des Arguments enthält
\mathcal{D}	die Menge der Indices aller Symbole, also $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, M\}$
\mathcal{D}_{d_μ}	Indexmenge derjenigen Symbole, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind
\mathcal{D}'_{d_μ}	Indexmenge derjenigen Symbole, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind und subtrahiert werden
\mathcal{D}''_{d_μ}	Indexmenge derjenigen Symbole, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind, aber nicht subtrahiert werden
$\overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}$	Indexmenge derjenigen Symbole, die nach dem μ -ten Detektionsschritt noch nicht detektiert worden sind
D	Diagonalmatrix
D	beliebige Matrix
D	Diversität
D_1	a posteriori Information nach dem Demapper
D_2	a posteriori Information der codierten Bits nach dem APP-Decoder
D'_2	a posteriori Information der Informationsbits nach dem APP-Decoder
ε	Variable bei Grenzwertbetrachtung
ε_j	Erwartungswert des quadratischen Fehler bei der Detektion des j -ten Symbols
$E\{\cdot\}$	Erwartungswert
E	Fehlermatrix
E_b	Energie pro Bit
$E^{(k)}$	Signalenergie eines Punktes $s^{(k)}$ aus dem Konstellationsdiagramm
E_s	mittlere Energie der Punkte des Konstellationsdiagramms
E_1	extrinsische Information vor dem Deinterleaver
E_2	extrinsische Information vor dem Interleaver
F	beliebige Matrix
G_{okt}	Vorwärtspolynom des rekursiven systematischen Faltungscodierers

$G_{r, \text{okt}}$	Rückwärtspolynom des rekursiven systematischen Faltungscodierers
h_{ij}	Eintrag der i -ten Zeile und j -ten Spalte von H
\tilde{h}_{ij}	Eintrag der i -ten Zeile und j -ten Spalte von \tilde{H}
\mathbf{h}_j	die j -te Spalte von H
$\tilde{\mathbf{h}}_j$	die j -te Zeile von \tilde{H}
$\mathcal{H}_\mu(\cdot)$	Histogramm, das aus Realisierungen des Arguments entsteht
H	Kanalmatrix
\tilde{H}	<i>post cancellation</i> Kanalmatrix
i	Zählvariable, die ausschließlich für die Empfangssymbole/-antennen verwendet wird
$\text{im}, \Im(\cdot)$	Bezeichnung des Imaginärteils einer komplexwertigen Größe
I_l	$l \times l$ Einheitsmatrix
I_A	a priori Information
I_E	extrinsische Information
j	imaginäre Einheit
j	Zählvariable, die ausschließlich für die Sendesymbole/-antennen verwendet wird
k	allgemeine Zählvariable
\tilde{k}	Nummer des quantisierten Symbols
l	allgemeine Zählvariable
\lim	Grenzwert
$L(\cdot)$	L -Wert, <i>log-likelihood-ratio</i>
$L\left(x_k^{d_\mu} \mid y_{d_\mu}\right)$	a posteriori L -Wert von $x_k^{d_\mu}$ unter der Voraussetzung, dass y_{d_μ} empfangen wurde
$L_a\left(x_k^j\right)$	a priori L -Wert von x_k^j
L_k	L -Wert des k -ten Bits eines Symbols
μ	Zählvariable für die Detektionsreihenfolge
$\text{map}\{\cdot\}$	Abbildungsfunktion des Mappers
$\max\{\cdot\}$	Maximum des Arguments beziehungsweise der Argumente
$\min\{\cdot\}$	Minimum des Arguments beziehungsweise der Argumente
M	Anzahl der Sendeantennen
v	allgemeine Zählvariable
n_i	Rauschen an der Empfangsantenne i
\tilde{n}_j	Eine Komponente des detektionsgefilterten Rauschens
\mathbf{n}	Vektor, in dem die N Rauschsymbole an den Empfangsantennen zusammengefasst sind
$\tilde{\mathbf{n}}$	detektionsgefilterter Rauschvektor
N	Anzahl der Empfangsantennen
N_0	Rauschleistungsdichtespektrum
π	Kreiszahl, 3,1415926...
Π	Blockschaltbildsymbol für den Interleaver

$p\left(y_j \mid x_k^j\right)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von y_j unter der Voraussetzung, dass x_k^j gesendet wurde
$P(Z)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses Z
$\mathcal{Q}(\cdot)$	Symbolquantisierung
Q	Anzahl der Bit pro Symbol
r_i	Symbol, das von Empfangsantenne i empfangen wird
$\operatorname{re}, \Re(\cdot)$	Bezeichnung des Realteils einer komplexwertigen Größe
$\operatorname{rang}(\cdot)$	Rang einer Matrix
\mathbf{r}	Vektor, in dem die N Symbole an den Empfangsantennen zusammengefasst sind
$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu}$	Empfangsvektor nach Subtraktion der für den d_μ -ten Detektionsschritt geltenden Störterme
\mathcal{R}_{th}	Entscheidungsschwelle der Zuverlässigkeitswerte ($th = \text{threshold}$)
$\mathcal{R}_{\text{th, opt}}$	optimale Entscheidungsschwelle
$\mathcal{R}(s_j)$	Zuverlässigkeitswert des Symbols s_j
R	beliebige Matrix
R_c	Coderate
R_n	Kovarianzmatrix eines Rauschvektors
R_s	Kovarianzmatrix eines Sendevektors
σ^2	allgemeine Varianz, die mit einem Index genauer bezeichnet werden kann
$\sigma_{\text{AWGN}, j}^2$	Varianz von \tilde{n}_j
$\sigma_{\text{ISVI}, j}^2$	Varianz der Intrasymbolvektorinterferenz
$\sigma_{\text{SAL}, j}^2$	Varianz der durch Symbolauslöschung verursachten Störung
σ_n^2	Varianz des Real- und Imaginärteils des Rauschens
$\sigma_{s, j}^2$	Varianz von s_j
σ_H^2	Varianz des Real- und des Imaginärteils von h_{ij}
$\tilde{\sigma}_j^2$	Varianz von y_j
$s^{(l)}$	Symbol, das aus der Bitkombination l (in binärer Schreibweise) durch das Mapping entstanden ist
s_j	Symbol, das von Sendeantenne j gesendet wird
\hat{s}_j	Die Quantisierung von y_j um einen Schätzwert für s_j zu erhalten
\mathbf{s}	Vektor, in dem die M Sendesymbole der Antennen zusammengefasst sind
S	Größe des Interleavers
S/P	Seriell-Parallel-Wandlung
t	Zeitvariable
u	Bits, die von der Quelle ausgegeben werden
\hat{u}	harte Entscheidungen der Quellen-Bits auf der Empfängerseite
U	Matrix bei der Singulärwertzerlegung
$\mathcal{V}(\cdot)$	Vektorraum
$\operatorname{var}\{\cdot\}$	Varianz
V	Matrix bei der Singulärwertzerlegung

w_{ji}	das Element in der j -ten Zeile und i -ten Spalte von W
\mathbf{w}_j	die j -te Zeile der Detektionsmatrix W
W	Detektionsmatrix
x	Bits, die aus dem Interleaver kommen
x'	Bits, die aus dem Faltungscodierer kommen
$x_k^{d_\mu}$	das k -te Bit vom Symbol der d_μ -ten Sendeantenne
y_{d_μ}	das Symbol der d_μ -ten Sendeantenne nach der MIMO-Detektion
\mathbf{y}	Vektor, in dem die M detektierten Symbole y_j zusammengefasst sind

Kurzfassung

Die Detektion der Empfangssignale eines codierten MIMO-Übertragungssystems ist in mehreren Schritten möglich, bei denen gegebenenfalls auch iterativ gegenseitig Informationen über Zwischenergebnisse ausgetauscht werden können. In dieser Arbeit werden verschiedene Empfängerstrukturen untersucht, die bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand eine gute Detektionsqualität aufweisen. Ausgehend von der mathematisch einfachsten Lösung, nämlich der parallelen Detektion aller gesendeten Symbole durch das so genannte *zero-forcing* oder alternativ *minimum mean squared error* wird die Empfängerstruktur erweitert und kontinuierlich verfeinert, ohne die Komplexität nennenswert zu erhöhen. Dazu wird bei der Detektion das Wissen verwendet, dass die Sendesymbole einem wertediskreten und endlichen Alphabet entstammen, den Symbolen bestimmte Bitkombinationen zugeordnet sind und so genannte L -Werte Zuverlässigkeitsinformationen des entsprechenden Bits liefern können. Insbesondere lässt sich die Varianz der Intrasymbolvektorinterferenz und der Fehlerfortpflanzung, die bei der sequentiellen Detektion mit hoher Wahrscheinlichkeit auftritt, bestimmen und durch deren Berücksichtigung die Bitfehlerhäufigkeit reduzieren. Dazu wird eine einfache, aber dennoch leistungsfähige Metrik entwickelt, um die Qualität von Symbolentscheidungen zu bestimmen. Mit allen Empfängerstrukturen lässt sich durch einfache Erweiterungen eine iterative Detektion durchführen. Drei prinzipiell verschiedene Iterationsmöglichkeiten werden behandelt, nämlich zum einen die Iteration über den Demapper, dann die Iteration über die Symbolauslöschung und zuletzt die Iteration über die Detektionsstufe. Abgerundet werden die Untersuchungen durch die Behandlung des optimalen MAP-Detektors sowohl im nichtiterativen wie auch im iterativen Fall.

Abstract

Detection of the received signals of a coded MIMO transmission system can be done step by step, where appropriate information about intermediate results can be exchanged. In this thesis, several receiver structures are investigated which have good performance although their computational complexity is relatively low. Based on the so called zero-forcing or alternatively minimum mean squared error solution, the receivers are extended and improved while their complexity has only moderate increase. Therefore, side information is used including the knowledge about the fact that the transmit symbols stem from a finite and discrete alphabet, that the symbols rely on certain bit combinations, and that the so called L -values represent reliability information on the respective bit. Especially, the variance of the intra symbol vector interference and the error propagation, which occurs with high probability using serial detection, can be determined and by this knowledge the bit error ratio can be reduced. All receiver structures can be used for iterative detection. Three basically different iteration possibilities are discussed, first, the iteration over the demapper, afterwards the iteration over the symbol cancellation and last the iteration over the detector. Finally, the topic is completed by the studies of the optimal MAP detector in case of no iterations as well as in the iterative case.

Kapitel 1

Einleitung

Mit ihren ersten Veröffentlichungen 1995 und 1996 über „Multi-antenna Gaussian Channels“ [1] und „Multi-Element Antennas“ [2] haben İ. Emre Telatar und Gerard J. Foschini einerseits eine neue Richtung in der drahtlosen Übertragungstechnik aufgezeigt und andererseits eine breite Lawine an Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der Mehrantennenübertragungssysteme (*multiple input multiple output*, MIMO) ausgelöst.

Konventionelle (drahtlose) Übertragungssysteme bestehen im Regelfall aus einer Sende- und einer Empfangsantenne. Man spricht auch von *single input single output* und kürzt diese Bezeichnung häufig mit SISO ab. Diese Abkürzung ist in letzter Zeit zunehmend auch für die so genannte *soft input soft output* Berechnung gebräuchlich [3,4]. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird deshalb im Weiteren auf diese Abkürzung verzichtet. Systeme mit ausschließlicher Sendediversität, also mit mehr als einer Sendeeinheit und genau einer Empfangseinheit, werden als MISO (*multiple input single output*) bezeichnet. Analog dazu nennt man Systeme mit ausschließlicher Empfangsdiversität als SIMO (*single input multiple output*).

Ein MIMO-Übertragungssystem besteht aus mindestens zwei Sendeantennen und mindestens zwei Empfangsantennen. Im Weiteren werden die Anzahl der Sendeantennen allgemein mit M und die Anzahl der Empfangsantennen mit N bezeichnet. Die abkürzende Schreibweise für solch ein Übertragungssystem ist $M \times N$ oder in der Literatur häufig auch (M, N) . Mit dieser Schreibweise lassen sich auch SIMO- und MISO-Systeme beschreiben (zum Beispiel $1 \times N$ oder $M \times 1$), die entweder am Sender oder am Empfänger nur eine Antenne besitzen. Der Begriff der *Antenne* geht in dieser Arbeit über die physikalische Ebene der Wellenausbreitung hinaus und beschreibt vielmehr die modulare Sende- beziehungsweise Empfangseinheit zum übertragungstechnischen Bit-Transport. Es hat sich allerdings in der Literatur eingebürgert, schlicht und abstrahierend von Antennen zu sprechen und das wird auch hier so gehandhabt.

Die neue Richtung, die Telatar und Foschini eingeleitet haben, spiegelt sich in der Tatsache wider, dass für MIMO-Systeme Reflexion, Beugung, Streuung und Mehrwegeausbreitung im Funkkanal essentiell wichtig sind. Diese gelten bis dato als zu überwindende Hemmnisse [5, 6]. Wie in späteren Kapiteln noch aufgeführt wird, hängt die Funktionsfähigkeit eines

MIMO-Systems hauptsächlich davon ab, dass alle Impulsantworten zwischen den Sende- und Empfangsantennen je paarweise unabhängig sind. Und dies wird gerade durch die Mehrwegeausbreitung und Streuung an Objekten in der Nähe von Sender und Empfänger erreicht.

Das Grundprinzip von MIMO-Systemen besteht darin, dass alle Kanalimpulsantworten in einer Kanalmatrix mit M Spalten und N Zeilen zusammengefasst werden und diese Matrix auf der Empfängerseite zum Beispiel im Falle eines linearen Zero-Forcing-Empfängers invertiert werden muss. Daneben gibt es noch eine Reihe nichtlinearer Verfahren, die jedoch gemeinsam haben, dass sie die Kanalmatrix in entsprechender Weise berücksichtigen müssen.

Analytische Lösungen für derartige Problemstellungen sind bekannt. Im übertragungstechnischen Sinne kommen jedoch noch einige Seiteninformationen hinzu, die auf der Empfängerseite ausgenutzt werden können, um die Bitfehlerhäufigkeit zu reduzieren. Diese Seiteninformationen umfassen die Tatsachen, dass die Übertragungssymbole einem diskreten Alphabet entstammen, dass Symbole aus Bits bestehen und die so genannten L -Werte der Bits Zuverlässigkeitsinformationen tragen. Darüber hinaus hat die verwendete Codierung im Allgemeinen Auswirkungen auf den Detektionsprozess. Umgekehrt sollten die Besonderheiten des Detektionsprozesses bei der Decodierung berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit werden verschiedene Empfängerstrukturen vorgestellt, die genau dieses Ziel verfolgen: die Lösungen mit Hilfe der linearen Algebra werden mit den Seiteninformationen und den Verfahren der Informationstheorie in geeigneter Weise verknüpft, um die Bitfehlerhäufigkeit zu senken. Dabei wird die Codierung und Decodierung als *black box* und damit als gegeben betrachtet. Auch so genannte (orthogonale) *space-time*-Blockcodes¹, der bekannteste ist der Alamouti-Code [7], sollen nicht näher betrachtet werden. Es existieren für mehr als zwei Sendeantennen auch keine orthogonalen Blockcodes mit Codiertrate 1 [8, 9]. Das heißt, bei Verwendung von derartigen Block-Codes büßt man automatisch den Vorteil mehrerer Sendeantennen im Hinblick auf die Datenrate ein. Die geringe Detektionskomplexität spricht allerdings für orthogonale *space-time* Blockcodes.

Statt dessen werden in dieser Arbeit ausschließlich so genannte *full rate* Systeme betrachtet, die in der Literatur auch als *spatial multiplexing* bezeichnet werden, weil die zu übertragenden Bits räumlich auf die Sendeantennen verteilt werden. Dabei steigt die Übertragungsrate linear mit der Anzahl der Sendeantennen an. Das heißt zum Beispiel, dass mit 6 Sendeantennen die Übertragungsrate bei gleicher senderseitiger Modulation drei Mal höher ist als bei 2 Sendeantennen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt.

Eine detaillierte Beschreibung des verwendeten MIMO-Systems wird in Kapitel 2 gegeben. Sämtliche Systemkomponenten werden dort beschrieben. Den Hauptteil bildet Kapitel 3. Es

¹Dabei handelt es sich im Prinzip um einen herkömmlichen Blockcode im Zeitbereich (*time*), der um die räumliche Dimension (*space*) auf dann zwei Dimensionen erweitert wird.

werden verschiedene lineare und nichtlineare Algorithmen für die Symboldetektion schrittweise hergeleitet. Insbesondere sind das für den linearen Fall die ZF- (*zero-forcing*) und die MMSE-Entzerrung (*minimum mean squared error*) und im nichtlinearen Fall der MAP-Algorithmus (*maximum a posteriori probability*) sowie ZF- und MMSE-basierte Algorithmen, die verschiedene Formen der geordneten sequentiellen Interferenzsubtraktion (*ordered successive interference cancellation*, OSIC) verwenden. Eine weitere Reduzierung der Bitfehlerhäufigkeit und/oder eine Verringerung der Berechnungskomplexität wird zusätzlich dadurch erzielt, indem man die Interferenzsubtraktion adaptiv gestaltet. Dazu wird unter anderem eine neue Metrik für die Zuverlässigkeitsinformation auf Symbolebene eingeführt. Bei der Vorgehensweise in diesem Kapitel wird sehr viel Wert auf logisch aufeinander folgende Herleitungen gelegt, so dass der Leser die Evolution der Empfängerstrukturen nachvollziehen kann. Ebenso wird vieles implizit bereits für die iterativen Strukturen vorbereitet.

Kapitel 4 behandelt verschiedene iterative Empfängerstrukturen. Die vorgestellten Detektionsalgorithmen und Empfängerstrukturen aus Kapitel 3 werden dabei als Kernelemente eingesetzt. Daher können die iterativen Strukturen als Erweiterung der herkömmlichen Empfänger verhältnismäßig kurz behandelt werden. Der Hauptunterschied der behandelten iterativen Empfänger liegt in der Art, wie die rückgeführten Informationen eingekoppelt und mathematisch berücksichtigt werden. Möglich sind hier unter anderem die Rückführung zum Demapper, zur Interferenzsubtraktion oder sogar bis zur Detektionsstufe. Daneben werden in Form eines Ausblicks noch andere Iterationsmöglichkeiten kurz beschrieben.

Die wichtigsten Ergebnisse werden schließlich in Kapitel 5 zusammengefasst. Es bildet auch den Abschluss dieser Arbeit. Außerdem werden am Ende jeder abgeschlossenen Einheit Simulationsergebnisse dargestellt und diskutiert.

Kapitel 2

MIMO-Übertragungsmodell und Systemvoraussetzungen

In diesem Kapitel wird das verwendete Übertragungsmodell vor- und die festgelegten Voraussetzungen dargestellt. Alle weiteren Kapitel und Ergebnisse basieren (soweit im Einzelfall nichts anderes erwähnt wird) auf den hier getroffenen Annahmen.

2.1 Kanalmodell

Bei einem MIMO-System gibt es im Allgemeinen zwischen jeder Sendeantenne j und jeder Empfangsantenne i eine Impulsantwort

$$h_{ij}(t) \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M) \quad . \quad (2.1)$$

Man beachte die Reihenfolge der Indizes der Impulsantwort. Diese Impulsantworten werden in einer Matrix

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1M}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2M}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \cdots & h_{NM}(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

zusammengefasst. In dieser Arbeit wird durchgängig der nicht frequenzselektive Kanal [6] vorausgesetzt. Dies wird häufig auch als Schmalbandnäherung bezeichnet, weil die Übertragungsfunktion im (schmalen) Frequenzbereich des Sendesignals als konstant angesehen wird. Die Folge dieser Festlegung ist, dass die Impulsantwort von einer Sendeantenne zu einer Empfangsantenne durch einen Dirac-Impuls gebildet wird. Da im Folgenden auch die Laufzeit zwischen Sender und Empfänger vernachlässigt wird, lässt sich die Impulsantwort durch

$$h_{ij}(t) = h_{ij} \delta(t) \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M) \quad (2.3)$$

beschreiben, und eine Faltung im Zeitbereich mit $h_{ij}(t)$ reduziert sich zu einer einfachen Multiplikation mit h_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$). Da die zeitliche Synchronisation auf Symbolebene vorausgesetzt wird und die später vorgestellten MIMO-Algorithmen symbolweise arbeiten, wird im Folgenden auf die Angabe der zeitlichen Abhängigkeit verzichtet. Gleichung (2.2) vereinfacht sich demzufolge zu

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Für spätere Überlegungen ist es sinnvoll, die Spaltenschreibweise von H einzuführen. $\mathbf{h}_j = (h_{1j}(t) \cdots h_{Nj}(t))^T$ ist die j -te Spalte von H . Die Bezeichnung $(\cdot)^T$ bedeutet dabei „transponiert“. Vektoren werden in dieser Arbeit stets **fett** gedruckt. Damit ist

$$H = (\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \cdots \mathbf{h}_M) \quad (2.5)$$

Der Kanal wird als quasi statisch (*quasi-static*) mit so genanntem *block fading* angenommen. Das bedeutet, die Übertragungsfunktion ist mindestens während der Dauer mehrerer Übertragungsvektorsymbole (einen so genannten *burst*) konstant. Danach kann sie sich unabhängig vom vorangegangenen Zustand verändern und bleibt wieder für eine Zeit lang konstant. Die Kohärenzzeit des Kanals umfasst also mehrere Symbole, was insbesondere für hohe Datenraten (wie sie mit MIMO-Systemen möglich sind) zutrifft [10]. Insofern ist die Kanalmatrix zeitabhängig. Allerdings ist sie, wie erwähnt, innerhalb eines Bursts konstant, was die vereinfachte obige Schreibweise rechtfertigt. Der Burst-Betrieb trifft insbesondere auf Funkverbindungen innerhalb von Gebäuden zu (*indoor applications*), bei denen sich Personen und etwa Türen nur relativ langsam bewegen und die Umgebung (Büroeinrichtung, Geräte, etc.) weitestgehend statisch ist. Da für MIMO-Systeme mehrere Antennen notwendig sind, dürften Funk-LANs (*local area network*) in Büroumgebungen eine der ersten Anwendungen sein, da zum einen der Platz vorhanden ist, mehrere Antennen im oder am Gerät (zum Beispiel einem Drucker oder der Rückseite eines Laptop-Bildschirms) unterzubringen. Zum anderen sind dort die meisten Geräte direkt an das Stromnetz angeschlossen und nicht durch die relativ geringe Speicherfähigkeit von Akkus gehemmt, die bei mehreren Sendeeinheiten stark beansprucht werden würden. Selbstverständlich ist für jeden einzelnen Burst eine Kanalschätzung entweder durch eine Trainingssequenz [11, 12] oder durch Pilotsymbole [13] notwendig. Wie in der Literatur allgemein üblich, wird hier vorausgesetzt, dass der Empfänger zu jeder Zeit vollständige Informationen über den Matrixkanal besitzt. Der Sender hingegen kennt den Übertragungskanal in dieser Arbeit nicht¹.

¹Es existieren daneben noch eine Reihe von weiteren Ansätzen für MIMO-Systeme, bei denen angenommen wird, die Kanaleigenschaften seien beim Sender gänzlich, teilweise oder wenigstens über statistische Größen bekannt. In diesen Fällen ist zum Beispiel eine Vorfilterung oder eine adaptive Sendeleistungszuweisung durch das so genannte *water filling* möglich. Diese Art von MIMO-Algorithmen werden hier nicht betrachtet.

Darüber hinaus wird angenommen, dass die Impulsantworten von den Sende- zu den Empfangsantennen je paarweise unabhängig, also keinerlei Korrelation unterworfen sind. Die Korrelation der Sende- und Empfangsantennen hängt unter anderem von ihrem räumlichen Abstand und der geometrischen Anordnung des Antennenarrays ab [5, 10]. Diese seien im Folgenden so gewählt, dass keine Korrelation auftritt.

Jede der $M \cdot N$ Impulsantworten h_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$), die in der Kanalmatrix H zusammengefasst sind, wird im äquivalenten Basisband als mittelwertfreie komplexwertige Gaußsche Zufallsvariable modelliert [6]. Das heißt, sowohl der Real- als auch der Imaginärteil sind Realisierungen von unabhängigen mittelwertfreien Gaußprozessen:

$$h_{ij} = h_{ij,\text{re}} + j \cdot h_{ij,\text{im}} \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M) \quad (2.6)$$

Dabei sind Real- und Imaginärteil unabhängig voneinander und haben beide jeweils die Varianz

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Dies bedeutet für den Erwartungswert des Betragsquadrats

$$E \left\{ |h_{ij}|^2 \right\} = 1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M) \quad (2.8)$$

und die Phase ist gleichmäßig zwischen 0 und 2π verteilt. $E \{ \cdot \}$ stellt den Erwartungswert dar. $|h_{ij}|^2$ ist eine χ_2^2 -verteilte Zufallsvariable [14], und $|h_{ij}|$ besitzt eine Rayleigh-Verteilung.

Anhand von (2.6) lässt sich zugleich auch die Schreibkonvention in dieser Arbeit erklären. Variablen werden kursiv dargestellt. Textbezeichnungen, die eine Variable näher beschreiben (in diesem Fall „re“ und „im“) werden nicht kursiv geschrieben. Um die imaginäre Einheit j von der Variablen j unterscheiden zu können, wird erstere ebenfalls nicht kursiv geschrieben.

2.2 Sender

In Abbildung 2.1 ist das Blockschaltbild des in dieser Arbeit verwendeten MIMO-Senders dargestellt. Die von der Quelle ausgegebenen uncodierten Bits $u \in \{0, 1\}$ werden durch einen systematischen Faltungscodierer mit Vorwärtspolynom $G_{\text{okt}} = 7$ und Rückwärtspolynom $G_{\text{r,okt}} = 4$ codiert. Die Coderate beträgt in allen Fällen $R_c = 1/2$. Der Codierer gibt

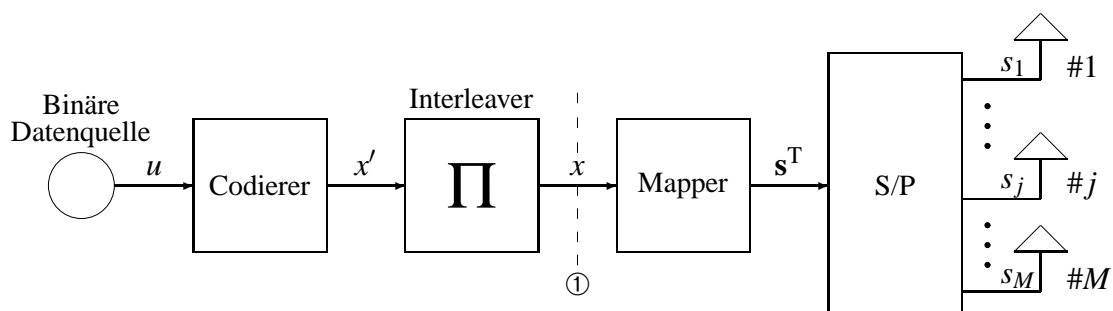


Abbildung 2.1: Blockschaltbild des MIMO-Senders

die codierten Bits x' ab. Deren Reihenfolge wird durch einen Verschränker (Interleaver) geändert, so dass nach dem Interleaver die vom Codierer eingeführte Abhängigkeit von aufeinander folgenden Bits wieder beseitigt wird. Die Interleaverlänge $S = 96000$ bit ist so groß, dass aufeinander folgende Bits nach dem Interleaver näherungsweise statistisch unabhängig sind. Der Interleaver ändert die Bitreihenfolge zufällig. Derartige Interleaver werden deshalb häufig als *random interleaver* bezeichnet. Dem empfängerseitigen Deinterleaver (siehe Kapitel 2.3.3) ist der Algorithmus der Verschränkung selbstverständlich bekannt, damit diese Operation rückgängig gemacht werden kann. Am Ausgang des Interleavers liegt die Bitfolge x an.

Diese Art der Codierung wurde in [15] als vertikale Codierung (*vertical coding*) bezeichnet. Der Begriff vertikal wird verwendet, weil sich die Codierung auf alle Sendeantennen, die im Blockschaltbild grafisch eben vertikal angeordnet sind, auswirkt. Im Gegensatz dazu wird in [15] auch die horizontale Codierung (*horizontal coding*) angesprochen. Dabei wird zwischen der Seriell-Parallel-Wandlung (S/P) in Abbildung 2.1 und jeder einzelnen Antenne jeweils ein Codierer verwendet. Diese M Codierer können für jede Antenne gleich oder wahlweise auch unterschiedlich sein. Weil sich in diesem Fall jeder einzelne Codierer nur jeweils auf einen horizontal eingezeichneten Antennenzweig auswirkt, spricht man in diesem Fall von horizontaler Codierung. Ein Vorteil der horizontalen Codierung ist, dass die Bits eines jeden Antennenzweiges unterschiedlich codiert werden können und gegebenenfalls sogar die Coderate flexibel dem Kanal angepasst werden kann. Dazu ist es allerdings senderseitig notwendig, mindestens die Langzeiteigenschaften des Matrixkanals zu kennen. Mit diesem Vorteil handelt man sich jedoch auch zwei nicht zu unterschätzende Nachteile ein. Zum einen erhöht sich die Komplexität des Systems erheblich, da im Sender M Codierer und im Empfänger entsprechende Decodierer verwendet werden müssen. Zum anderen setzen die meisten der in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Algorithmen eine sequentielle vertikale (also sich über alle Antennen erstreckende) Symbolverarbeitung ein. Dies wäre unter Verwendung einer horizontalen Codierung nicht mehr möglich. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf die horizontale Codierung verzichtet.

Die vom Interleaver ausgegebenen Bits x werden durch den so genannten Mapper (*to map* = abbilden) eineindeutig auf reelle oder komplexwertige Symbole abgebildet (zugeordnet). Die Symbole werden einem Konstellationsdiagramm \mathcal{A} entnommen. In Abbildung 2.2 ist eine komplexwertige 16-QAM (Quadratur-Amplituden-Modulation) dargestellt. Je Q Bits werden einem Symbol $s^{(k)}$ ($k = 0, \dots, 2^Q - 1$) zugeordnet, was in diesem Fall ($Q = 4$ bit/Symbol) eine Gesamtzahl von $2^Q = 16$ verschiedenen Symbolen ergibt. Die Bitfolge 0111 (was der Dezimalzahl 7 entspricht) würde in diesem Fall auf das Symbol $s^{(7)} = -3 - j$ abgebildet werden:

$$\text{map}\{b_0b_1b_2b_3\} = \text{map}\{0111\} = s^{(7)} = -3 - j \quad . \quad (2.9)$$

Der hochgestellte und in runde Klammern gesetzte Index kennzeichnet die Symbole des Konstellationsdiagramms. Dagegen bezeichnet der tiefgestellte Index in Abbildung 2.1 die Zugehörigkeit zu einer Antenne.

Wenn sich von jedem Konstellationspunkt das zugehörige Bitmuster (*bit pattern*) zu jedem

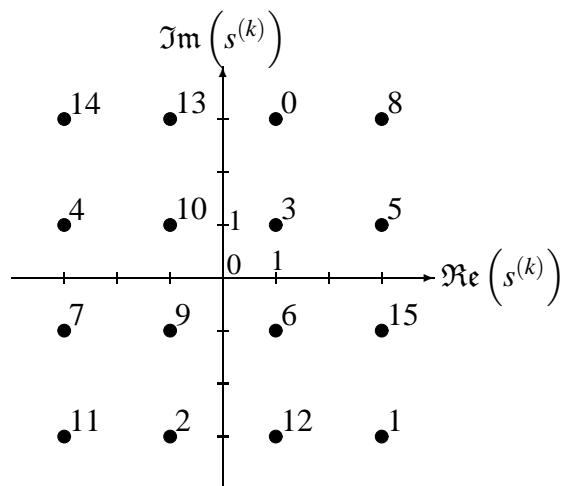


Abbildung 2.2: Konstellationsdiagramm \mathcal{A}_1 einer orthogonalen 16-QAM

horizontal oder vertikal benachbarten Konstellationspunkt nur um ein Bit ändert, spricht man von *Gray Mapping*. Trifft dies für mindestens einen Punkt nicht zu, liegt *Anti-Gray Mapping* vor. In Abbildung 2.2 handelt es sich also um ein Anti-Gray Mapping, da sich zum Beispiel das Bitmuster vom Punkt 0 (Bitmuster 0000) zum Nachbarpunkt 3 (Bitmuster 0011) um 2 Bit ändert. Auf dieses Konstellationsdiagramm \mathcal{A}_1 komme ich in Kapitel 4 zurück.

In Abbildung 2.1 sind bereits je M aufeinander folgende Symbole zu einem Zeilenvektor $\mathbf{s}^T = (s_1 \cdots s_M)$ zusammengefasst. Das heißt, dass die zeitliche Folge der Symbole zu je M Symbolen gruppiert werden. Bei der anschließenden Seriell-Parallel-Wandlung wird jeder Zeilenvektor \mathbf{s}^T zu einem Spaltenvektor \mathbf{s} transponiert und die einzelnen Vektorelemente den entsprechenden Sendeantennen zugewiesen. Jede Sendeantenne „trägt“ nun eine Folge von Symbolen, die jedes M -te Element der ursprünglichen Symbolfolge enthält.

In einem solchen MIMO-System mit M Sendeantennen wird die Bitrate der Datenquelle gegenüber einem Ein-Antennen-System um den Faktor M erhöht, da jede Sendeantenne einen separaten (von den anderen Antennen unabhängigen) Bitstrom überträgt. Setzt man weiter voraus, dass jede Antenne auf derselben Frequenz und mit derselben Bandbreite sendet, erhöht sich auch die spektrale Effizienz um den Faktor M . Und gerade diese Erhöhung ist insbesondere bei immer knapper werdenden Frequenzbändern der entscheidende Vorteil von MIMO-Systemen.

Da – wie erwähnt – der Sender vektorweise arbeitet, ist es für die weitere Betrachtung analog zur Kanalmatrix sinnvoll und praktikabel, einen einzigen Zeitpunkt wie bereits geschehen zu fixieren, die einzelnen Antennensymbole zu diesem Zeitpunkt in einem Sendevektor zusam-

menzufassen und die zeitliche Abhängigkeit zu unterdrücken:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_M \end{pmatrix} . \quad (2.10)$$

Jedes Vektorelement ist einem vorgegebenen Konstellationsdiagramm entnommen:

$$s_j \in \{s^{(0)}, \dots, s^{(2^Q-1)}\} \quad (j = 1, \dots, M) . \quad (2.11)$$

Im Allgemeinen ist es möglich, für jede Antenne ein eigenes Konstellationsdiagramm zu verwenden, zum Beispiel eine 16-QAM mit Gray Mapping für Antenne 1, eine BPSK für Antenne 2, etc. Durch eine solche Zuweisung könnte unter bestimmten Voraussetzungen die Bitfehlerhäufigkeit (*bit error ratio*, BER) im Empfänger reduziert werden. Das Problem dabei ist, nach welchen Kriterien die eine oder die andere Symbolzuordnung gewählt wird. Der Sender bräuchte dazu stets aktuelle Kanalinformationen, um die Zuweisung zu optimieren. Wie oben allerdings festgelegt, soll in dieser Arbeit vorausgesetzt werden, dass der Sender keinerlei Informationen über den Übertragungskanal besitzt. Aus diesem Grund wird für jede Antenne dasselbe Konstellationsdiagramm verwendet. Bei Q bit/Symbol werden mit jedem Sendevektor $M \cdot Q$ Bits übertragen.

Die Signalenergie eines Punktes $s^{(k)}$ ($k = 0, \dots, 2^Q - 1$) aus dem Konstellationsdiagramm sei mit

$$E^{(k)} = |s^{(k)}|^2 \quad (k = 0, \dots, 2^Q - 1) \quad (2.12)$$

bezeichnet. Die mittlere Energie aller Punkte eines Konstellationsdiagramms berechnet sich durch

$$E_s = \frac{1}{2^Q} \sum_{k=0}^{2^Q-1} E^{(k)} . \quad (2.13)$$

Dies ist gleichzeitig die mittlere Energie eines Sendesymbols, also

$$E_s = \mathbb{E} \left\{ |s^{(k)}|^2 \right\} \quad (k = 0, \dots, 2^Q - 1) . \quad (2.14)$$

In [16] werden darüber hinaus einfache Formeln in Abhängigkeit von Q für die Berechnung der mittleren Energie angegeben, so dass es nicht notwendig ist, (2.13) tatsächlich auszuwerten. Man beachte, dass für Konstellationen, bei denen sämtliche Signalpunkte ausschließlich auf einem einzigen konzentrischen Kreis angeordnet sind (zum Beispiel QPSK), die mittlere Energie stets mit der Energie eines jeden Symbols übereinstimmt.

Auf die in Abbildung 2.1 mit ① und der gestrichenen Linie markierten Stelle wird auf Seite 16 in Kapitel 2.3.4 noch näher eingegangen.

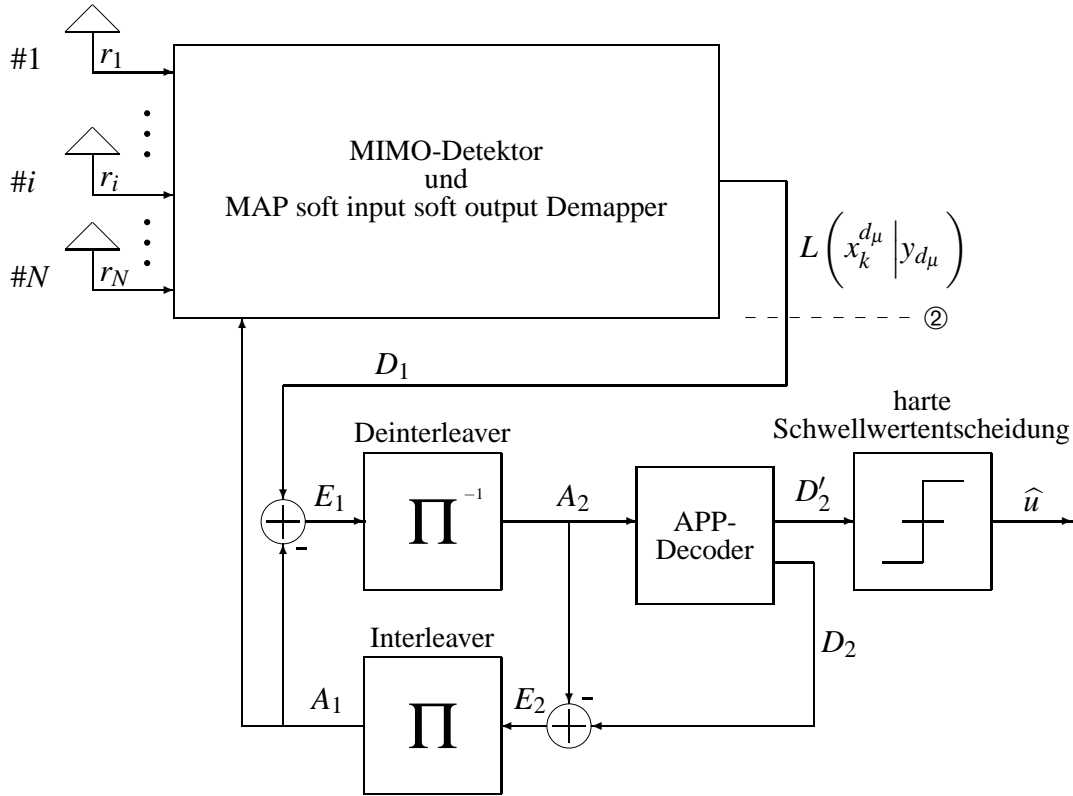


Abbildung 2.3: Blockschaltbild des gesamten MIMO-Empfängers

2.3 Empfänger

In Abbildung 2.3 ist das Blockschaltbild des in dieser Arbeit verwendeten MIMO-Empfängers dargestellt. Es wird in den nächsten Unterkapiteln genau beschrieben. Zunächst wird allerdings noch die in dieser Arbeit verwendete SNR-Definition (SNR, *signal to noise ratio*) eingeführt.

An jeder der N Empfangsantennen tritt eine mit der jeweiligen Impulsantwort gewichteten Überlagerung aller von den einzelnen Sendeantennen abgegebenen Signale auf. In dieser Arbeit wird der zeitliche Synchronismus² der beim Empfänger eintreffenden Signale aller Sendeantennen vorausgesetzt und – wie beim Kanalmodell bereits erwähnt, – sämtliche Laufzeiten ignoriert. An einer Empfangsantenne i entsteht also das überlagerte Signal

$$r_i = h_{i1}s_1 + \dots + h_{iM} s_M + n_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad . \quad (2.15)$$

Dabei ist n_i ein komplexwertiges mittelwertfreies additives weißes Gaußsches Rauschen (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*). Real- und Imaginärteil des Rauschens sind unabhängig voneinander und besitzen jeweils die Varianz

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \quad , \quad (2.16)$$

²Das ist der Zustand der zeitlichen Übereinstimmung.

so dass das gesamte komplexwertige Rauschen an einer Antenne die Varianz $2\sigma_n^2$ besitzt. $\frac{N_0}{2}$ ist die zweiseitige Rauschleistungsdichte. Man beachte wiederum, dass der Index nicht kurz geschrieben ist, da es sich bei 'n' nicht um eine Variable, sondern um eine Bezeichnung ('noise') handelt. Alle Rauschbeiträge an den N Empfangsantennen lassen sich zu einem Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

mit der zugehörigen Kovarianzmatrix $\text{cov}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 2\sigma_n^2 I_N$ zusammenfassen. Die Kovarianzmatrix zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist durch

$$\text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = E\{\mathbf{a}\mathbf{b}^*\} - E\{\mathbf{a}\}E\{\mathbf{b}^*\} \quad (2.18)$$

definiert. Der Operator $(\cdot)^*$ bezeichnet die Konjugiert-Transponierte und I_N ist eine $N \times N$ Einheitsmatrix. Mit der Matrix- beziehungsweise Vektorschreibweise der Gleichungen (2.4), (2.10) und (2.17) lässt sich das Übertragungssystem durch

$$\mathbf{r} = H * \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.19)$$

beschreiben. Wegen der Annahme, dass die Impulsantworten durch Dirac-Impulse dargestellt werden können, vereinfacht sich die Faltung in (2.19) zu einer Matrixmultiplikation. Es ergibt sich vereinfacht

$$\mathbf{r} = H\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (2.20)$$

Dabei ist

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

der Empfangsvektor, der alle N Signale an den Empfangsantennen enthält. Verwendet man die spaltenweise Schreibung von H aus (2.5), so wird (2.20) zu

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} \quad (2.22)$$

Die j -te Spalte von H enthält also diejenigen Elemente, mit denen das j -te Element des Sendevektors beim Empfänger gewichtet wird.

In der Literatur lassen sich für das Signal-Rausch-Verhältnis bei MIMO-Systemen etliche verschiedene Definitionen finden. Diese weichen hauptsächlich um die Faktoren M und N sowie die Definition der Varianz des AWGN voneinander ab. Beides bedeutet jedoch lediglich eine Verschiebung entlang der entsprechenden Koordinatenachse.

Es soll nun eine brauchbare Definition für $\frac{E_b}{N_0}$ hergeleitet werden, die später in den Abbildungen zur Bitfehlerhäufigkeit verwendet wird. Dabei ist E_b die mittlere pro Informationsbit übertragene Energie beim Empfänger. $\frac{N_0}{2}$ ist die zweiseitige Rauschleistungsdichte.

Mit (2.13) ist die gesamte Sendeenergie aller Antennen $M \cdot E_s$ für jeden übertragenen Sendevektor \mathbf{s} . Weil die Kanalkoeffizienten nach (2.8) die Varianz 1 haben, beträgt die durchschnittliche Energie an jeder Empfangsantenne ebenfalls $M \cdot E_s$. Die N Empfangsantennen erhalten also insgesamt die Energie $M \cdot E_s \cdot N$, die von einem Sendevektor stammt. Mit einem Sendevektor werden $M \cdot Q$ codierte Bits oder $R_c \cdot M \cdot Q$ Informationsbits übertragen.

Dann ergibt sich für die mittlere pro Informationsbit übertragene Energie beim Empfänger

$$E_b = \frac{M \cdot E_s \cdot N}{R_c \cdot M \cdot Q} \quad (2.23)$$

und schließlich für das Signal-Rausch-Verhältnis unter Berücksichtigung von (2.16)

$$\text{SNR} = \frac{E_b}{N_0} = \frac{M \cdot E_s \cdot N}{R_c \cdot M \cdot Q \cdot N_0} = \frac{E_s \cdot N}{R_c \cdot Q \cdot 2\sigma_n^2} \quad (2.24)$$

Üblicherweise wird das Signal-Rausch-Verhältnis in dB ausgedrückt. Dies führt auf

$$\text{SNR} \Big|_{\text{dB}} = \frac{E_b}{N_0} \Big|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_s \cdot N}{R_c \cdot Q \cdot 2\sigma_n^2} \right) \quad (2.25)$$

Da im Weiteren ausschließlich die dB-Form verwendet wird und später auch als Achsenbeschriftung dient, wird die tiefgestellte Kennzeichnung „dB“ ab jetzt stets weggelassen. Damit hat man eine brauchbare SNR-Definition auf Basis von $\frac{E_b}{N_0}$.

2.3.1 Der MIMO-Detektor

Der MIMO-Detektor (siehe Abbildung 2.3) beziehungsweise die Struktur und damit die Algorithmen, die der Detektion zu Grunde liegen, sind der Hauptteil dieser Arbeit. Sie werden in Kapitel 3 ausführlich erläutert. Im Allgemeinen verwenden die Algorithmen vier verschiedene Arten von Informationen:

- Den Empfangsvektor \mathbf{r} .
- Die von der (iterativen) Decodierstufe zurückgeführte Information A_1 .
- Die Kenntnis der Kanalübertragungsmatrix H .
- Informationen, die während der Detektion anfallen.

Die Ausgabe eines MIMO-Detektors besteht üblicherweise aus drei verschiedenen Elementen:

- Schätzwerte y_j ($j = 1, \dots, M$) der gesendeten Symbole.
- Optional deren Quantisierung auf Punkte \hat{s}_j ($j = 1, \dots, M$) des verwendeten Konstellationsdiagramms \mathcal{A} .

- Die zu jedem detektierten Symbol y_j zugehörige Varianz (Unsicherheit) $\tilde{\sigma}_j^2$ ($j = 1, \dots, M$).

Die verschiedenen MIMO-Detektoren unterscheiden sich durch die Art und Weise, wie die Ausgangsinformationen aus den Eingangsinformationen ermittelt werden.

2.3.2 Der MAP-Soft-Input-Soft-Output-Demapper

Der *maximum a posteriori probability* (MAP) soft input soft output Demapper berechnet aus den empfangenen Symbolen Schätzwerte auf die Bits, die beim Sender vor dem Mapper aufgetreten sind. Im Vergleich zu einem herkömmlichen Demapper gibt der soft output Demapper nicht Binärwerte 0 und 1 aus, sondern logarithmierte Verhältnisse, die so genannten *log-likelihood-ratios* (LLR) oder kurz *L*-Werte.

Nach Abbildung 2.1 werden je Q Bits x_k^j ($k = 0, \dots, Q-1$) aus x auf ein Sendesymbol s_j abgebildet und der Sendeantenne j ($j = 1, \dots, M$) zugeordnet. Auf der Empfängerseite liegen nach der MIMO-Detektion Schätzwerte y_j ($j = 1, \dots, M$) der gesendeten Symbole s_j vor. Darauf basierend berechnet sich der *L*-Wert des k -ten Bits des Symbols von Antenne j durch

$$L\left(x_k^j \mid y_j\right) = L_a\left(x_k^j\right) + \ln \frac{\sum_{v=0}^{2^{Q-1}-1} p\left(y_j \mid x_k^j=1, x_l^j, l=0, \dots, Q-1, l \neq k\right) \cdot \exp\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{Q-1} x_l^j \cdot L_a\left(x_l^j\right)\right)}{\sum_{v=0}^{2^{Q-1}-1} p\left(y_j \mid x_k^j=0, x_l^j, l=0, \dots, Q-1, l \neq k\right) \cdot \exp\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{Q-1} x_l^j \cdot L_a\left(x_l^j\right)\right)}, \quad (2.26)$$

wobei in Abhängigkeit des Summenindex v stets

$$\sum_{l=0}^{k-1} x_l^j \cdot 2^l + \sum_{l=k+1}^{Q-1} x_l^j \cdot 2^{l-1} = v \quad (2.27)$$

zu erfüllen ist. Voraussetzung für die Gültigkeit von (2.26) ist die Unabhängigkeit der x_k^j ($j = 1, \dots, M$; $k = 0, \dots, Q-1$). Weil der sendeseitige Interleaver (siehe Kapitel 2.2) groß genug ist, ist diese Voraussetzung näherungsweise erfüllt.

$$L_a\left(x_k^j\right) = \ln \frac{P\left(x_k^j = 1\right)}{P\left(x_k^j = 0\right)} \quad (2.28)$$

ist das a priori Wissen (Vorwissen) über das k -te Bit des Symbols s_j , und $P(\cdot)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Argument zutrifft. Zähler und Nenner von (2.26) unterscheiden sich nur an einer einzigen Stelle. Und zwar steht im Zähler innerhalb der bedingten Wahrscheinlichkeit $x_k^j = 1$ und im Nenner $x_k^j = 0$. Zusammen mit (2.27) besagt dies, dass das momentan

betrachtete k -te Bit (für das der L -Wert berechnet wird) im Zähler fest zu 1 und im Nenner fest zu 0 gesetzt und über alle anderen Bitkombinationen permutiert wird. Daher schließen die Summenindizes in (2.27) den Index k aus. Für eine ausführliche Herleitung und Erklärung dieser Gleichungen sei auf [17, 18] verwiesen.

In Abbildung 2.3 ist der Index j von $L\left(x_k^j | y_j\right)$ mit d_μ angegeben. Dies ist ein Vorgriff auf die vorgestellten Detektionsalgorithmen. Deren Leistungsfähigkeit hängt unter anderem auch von der Reihenfolge ab, in der gesendete Symbole s_j beim Empfänger detektiert werden und die in späteren Kapiteln durch d_μ dargestellt werden wird.

Gleichung (2.26) gilt nur beim symbolweisen Demapping. Beim *maximum likelihood* Demapping oder *maximum a posteriori* Demapping über den gesamten M -dimensionalen Symbolraum muss diese Gleichung verändert werden. Dies wird in Kapitel 3.6 behandelt.

2.3.3 Die iterative Decodierung

Die Struktur der in Abbildung 2.3 eingezeichneten iterativen Decodierstufe besitzt die bekannte Form einer seriell verketteten Turbo-Decodierung [19]. Der MIMO-Detektor mit MAP-Demapper stellt dabei den *inneren* Decoder dar. Der eingezeichnete APP-Decoder [20] ist der *äußere* Decoder.

MIMO-Detektor und MAP soft output Demapper verwenden die von der iterativen Empfängerstruktur zurück gelieferte a priori Information A_1 und berechnen die a posteriori Information D_1 , die aus den L -Werten $L\left(x_k^{d_\mu} | y_{d_\mu}\right)$ besteht. Nach Subtraktion von A_1 entsteht die extrinsische Information E_1 , die nach dem Deinterleaver zur a priori Information A_2 für den APP-Decoder wird. Der APP-Decoder (BCJR-Algorithmus [20]) berechnet die a posteriori Information D_2' der Informationsbits (aus der Bitquelle im Sender) und die a posteriori Information D_2 der codierten Bits (das sind die Bits an den Ausgängen des Kanalcodierers). Nach Subtraktion der a priori Information A_2 wird die extrinsische Information E_2 nach Durchlaufen des Interleavers zur neuen a priori Information A_1 für den MIMO-Detektor. Dies schließt eine Iteration ab. Aus D_2' werden nach Ende aller Iterationen die Schätzwerte für die Informationsbits \hat{u} durch eine Vorzeichenentscheidung der L -Werte gewonnen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird neben dem Codierer auch die Decodierstufe als *black box* betrachtet. Das heißt, sie wird in ihrer Funktion als gegeben betrachtet. In der Literatur gibt es unterschiedliche Bezeichnungen für den ersten Durchlauf durch die Empfängerstruktur. Dieser erste Durchlauf wird teilweise als *nullte* und teilweise als *erste* Iteration bezeichnet. In dieser Arbeit heißt der erste Durchlauf nullte Iteration, da in diesem Fall noch keine Information von vorangegangenen Iterationszyklen vorliegt.

2.3.4 Das uncodierte MIMO-Übertragungssystem

In den Abbildungen 2.1 und 2.3 sind Sender und Empfänger eines codierten MIMO-Übertragungssystems dargestellt. Implizit ist jedoch auch ein uncodiertes System enthalten, das durch die beiden mit ① und ② bezeichneten Schnittstellen markiert wird.

In Abbildung 2.1 können die binäre Datenquelle, der Codierer und der Interleaver als eine neue Bitquelle zusammengefasst werden, die uncodierte Bits ausgibt. Anschließend werden diese Bits durch den Mapper auf Symbole abgebildet und über den MIMO-Kanal übertragen. Auf der Empfängerseite markiert der Punkt ② diejenige Stelle, an der die uncodierten Bits durch eine harte Schwellwertentscheidung über die angegebenen L -Werte geschätzt werden können. Es ist in den Simulationen daher leicht möglich, die Bitfehlerhäufigkeit eines entsprechenden uncodierten Systems parallel ohne erheblichen Mehraufwand zu bestimmen.

Aus (2.25) folgt für das Signal-Rausch-Verhältnis dieses uncodierten Systems – ohne Codierer wird $R_c = 1$ – unmittelbar

$$\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{uncodiert}} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_s \cdot N}{Q \cdot 2\sigma_n^2} \right) = \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{codiert}} + 10 \log_{10} R_c \quad . \quad (2.29)$$

Das heißt, bei einer Coderate von beispielsweise $R_c = \frac{1}{2}$ können gleichzeitig die Bitfehlerhäufigkeit des codierten Systems sowie des um $10 \log_{10} \frac{1}{2} \approx 3 \text{ dB}$ rauschreduzierten uncodierten Systems simuliert werden. Beim Vergleich eines codierten und eines uncodierten Systems muss dieser Versatz natürlich berücksichtigt werden.

Kapitel 3

Empfängerstrukturen für MIMO-Systeme

In diesem Kapitel werden nichtiterative Verfahren zur Detektion von MIMO-Signalen behandelt. Diese bilden die Grundlage für die iterativen Verfahren in Kapitel 4. Neben den mathematischen Grundlagen werden Verfahren zur Reduzierung der Bitfehlerhäufigkeit vorgestellt und durch Simulationen verifiziert.

Die beiden englischen Begriffe *detection* (zum Beispiel [21, 22]) und *equalization* (zum Beispiel [23, 24]) werden in der Literatur häufig alternativ verwendet, um den gesamten Prozess im MIMO-Detektor zu beschreiben. In codierten Systemen wird häufig auch von *MIMO-decoding* gesprochen. Die unklare Trennung der Begriffe hat ihren Ursprung darin, dass die Detektion (Entdeckung) der Symbole eine Kanalverzerrung (*channel equalization*) voraussetzt. Andererseits ist diese Kanalverzerrung besonders bei MIMO-Systemen eng mit der Symboldetektion verknüpft und baut teilweise sogar darauf auf. Im Weiteren Verlauf dieser Arbeit wird stets der Begriff Detektion verwendet. Die Verzerrung ist darin eingeschlossen.

Bisher wurde über die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen noch keine Aussage gemacht. Tatsächlich existieren Detektionsverfahren, die mit jeder Kombination aus Sende- und Empfangsantennen funktionieren. Die meisten Methoden verlangen jedoch Einschränkungen bezüglich der Anzahl der Sende- und/oder der Anzahl der Empfänger. Der Grund dafür ist plausibel: Die Anzahl der Empfänger N stellt (mathematisch betrachtet) die Anzahl der Gleichungen dar. Die Anzahl der Sende- M ist gleich der Anzahl der Unbekannten s_j . Für $M > N$ ist dieses Gleichungssystem unterbestimmt und besitzt keine Lösung. Im Folgenden wird deshalb im Regelfall davon ausgegangen, dass die Anzahl der Sende höchstens so groß ist wie die Anzahl der Empfänger. Es gilt also

$$M \leq N \quad . \quad (3.1)$$

In den Fällen, in denen diese Restriktion nicht notwendig ist, wird es deutlich erwähnt.

Da MIMO-Übertragungskanäle als Matrizen geschrieben werden können, werden Matrixoperationen und Grundlagen der Matrizenrechnung sehr wichtig werden. Allgemeine Sätze

und Theoreme der Matrizenrechnung können in [25–30] nachgeschlagen werden. Im Folgenden werden nur bei speziellen Umformungen wichtige Literaturstellen angegeben.

3.1 Zero-Forcing-Entzerrung

Der *Zero-Forcing*-Entzerrer ist der einfachste Detektor für MIMO-Systeme. Üblich ist die Abkürzung ZF für *zero-forcing*. Ausgangspunkt für die Detektion ist (2.20), wobei das Rauschen bei der Berechnung der Detektionsmatrix hier zunächst nicht berücksichtigt wird. Es ergibt sich also

$$\mathbf{r} = H\mathbf{s} \quad . \quad (3.2)$$

In Abbildung 2.3 wurde der MIMO-Detektor und Demapper als Block dargestellt. Bei der jetzt betrachteten Detektionsmethode wird dieser Block durch Abbildung 3.1 gefüllt. Die Funktion wird im Folgenden klar werden.

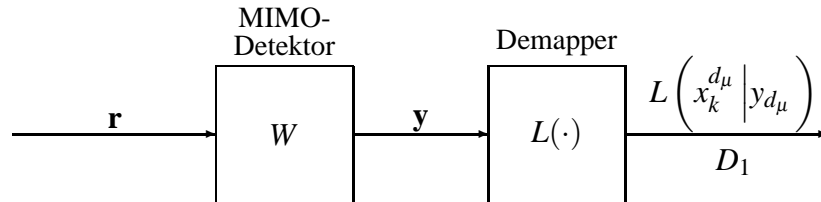


Abbildung 3.1: Prinzipieller Aufbau eines einfachen MIMO-Detektors mit anschließendem Demapping

3.1.1 Gleiche Anzahl von Sendern und Empfängern

In diesem einfachen Fall ($M = N$) ist H eine quadratische Matrix. Gleichung (3.2) besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix H regulär ist, wenn also für die Determinante von H

$$\det H \neq 0 \quad (3.3)$$

gilt. Die Zeilen oder Spalten von H müssen also linear unabhängig sein. Wegen der paarweisen Unabhängigkeit aller h_{ij} (siehe Kapitel 2.1) ist hier $P(\det H \neq 0) = 1$. Umgekehrt ist diese Bedingung nicht generell erfüllt, wenn diese Unabhängigkeit der Kanalkoeffizienten nicht gewährleistet ist. Die eindeutige Lösung \mathbf{y} wird durch Anwendung der inversen Matrix

$$W = H^{-1} \quad (3.4)$$

von H auf (3.2) berechnet:

$$\mathbf{y} = W\mathbf{r} \quad . \quad (3.5)$$

Mit (3.4) ergibt sich

$$\mathbf{y} = H^{-1}\mathbf{r} = H^{-1}H\mathbf{s} = I_M\mathbf{s} = \mathbf{s} \quad . \quad (3.6)$$

Die Komponenten y_j von $\mathbf{y} = (y_1 \cdots y_M)^T$ werden als Softwerte der Sendesymbole s_j bezeichnet, weil sie die Entscheidungsgrundlage für eine Symbolschätzung (Quantisierung) bilden. I_M ist die $M \times M$ Einheitsmatrix. Mit W wird die Detektionsmatrix bezeichnet, die zur Kanalentzerrung verwendet wird¹. Es fällt in (3.4) auf, dass die Berechnung von W unabhängig von \mathbf{n} , damit unabhängig von N_0 ist und deshalb in der Konsequenz das SNR nicht berücksichtigt wird. ZF stellt also eine idealisierte Lösung dar. Die Berücksichtigung des SNR wird ab Kapitel 3.3 behandelt. Weil durch (3.5) alle Komponenten von \mathbf{y} gleichzeitig und damit parallel detektiert werden, spricht man von *paralleler Detektion*. Elementweise ergibt sich

$$y_j = s_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.7)$$

Diese Softwerte werden dem soft input Demapper zugeführt, der daraus L -Werte auf die den Symbolen zu Grunde liegenden Bits gemäß (2.26) errechnet. Aus den Softwerten lassen sich aber auch Schätzwerte für die gesendeten Symbole ermitteln. Die Quantisierung

$$\hat{s}_j = \mathcal{Q}(y_j) = s^{(\tilde{k})} \quad (3.8)$$

entscheidet sich für denjenigen Konstellationspunkt $s^{(\tilde{k})}$ aus dem verwendeten Konstellationsdiagramm \mathcal{A} , der den geringsten Euklidischen Abstand zum Softwert y_j des Symbols besitzt:

$$\left(y_j - s^{(\tilde{k})}\right)^2 \leq \left(y_j - s^{(k)}\right)^2 \quad \left(k = 0, \dots, \tilde{k} - 1, \tilde{k} + 1, \dots, 2^Q - 1\right) \quad . \quad (3.9)$$

$\mathcal{Q}\{\cdot\}$ stellt den Quantisierungsoperator dar. Anhand der Gleichungen (3.6) und (3.7) lässt sich der Name *zero-forcing* für diese Detektionsmethode erklären: Durch die Einheitsmatrix werden die so genannten Intrasymbolvektorinterferenzen (siehe Kapitel 3.3.1) zu 0 erzwungen (*forced to zero*). Das heißt, jeder Softwert y_j hängt nur vom entsprechenden Sendesymbol s_j ab und wird durch die anderen Symbole desselben Sendevektors nicht beeinflusst. Im rauschfreien Fall ($\mathbf{n} = 0$) ist also eine eindeutige und fehlerfreie Rückgewinnung der gesendeten Symbole möglich:

$$\hat{s}_j \equiv s_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.10)$$

Im realen rauschbehafteten MIMO-System hat diese Art der Entzerrung jedoch Auswirkungen auf das Rauschen. Wendet man die ZF-Detektionsmatrix auf die ursprüngliche Gleichung (2.20) an, so ergibt sich

$$\mathbf{y} = W\mathbf{r} = W(H\mathbf{s} + \mathbf{n}) = WH\mathbf{s} + W\mathbf{n} = H^{-1}H\mathbf{s} + H^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{s} + H^{-1}\mathbf{n} \quad . \quad (3.11)$$

In komponentenweiser Schreibung ergibt sich

$$y_j = s_j + \sum_{i=1}^N w_{ji}n_i \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.12)$$

¹In späteren Kapiteln wird es nicht mehr in jedem Fall möglich sein, die Detektion durch eine einfache Matrixdarstellung zu beschreiben. Solange es jedoch praktikabel ist, wird davon Gebrauch gemacht.

Dabei ist w_{ji} das Element in der j -ten Zeile und i -ten Spalte von W .

Das Rauschen \mathbf{n} wird durch den Detektionsprozess zu $H^{-1}\mathbf{n}$ verändert. Die Folgen werden in Kapitel 3.1.3 vorgestellt. Offensichtlich ist aber, dass eine fehlerfreie Symbolquantisierung nun nicht mehr in allen Fällen möglich ist. Vielmehr treten Fehler in der Symbolschätzung auf, die durch den Rauschterm verursacht werden.

3.1.2 Ungleiche Anzahl von Sendern und Empfängern

Für den Fall, dass $M < N$ gilt, ist die Kanalmatrix H nicht mehr quadratisch, und es existiert keine herkömmliche inverse Matrix. Es handelt sich bei (3.2) dann um ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die Lösung muss also auf einem anderen Weg gefunden werden. Die M Spalten von H spannen einen Vektorraum $\mathcal{V}(H)$ (engl. *range* oder *image*) auf, der als

$$\mathcal{V}(H) = \left\{ H\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{C}^M \right\} \quad (3.13)$$

definiert wird. \mathbf{a} sind alle möglichen komplexwertigen Spaltenvektoren mit M Vektorelementen. Gleichung (3.2) besitzt offensichtlich dann und nur dann eine Lösung, wenn $\mathbf{r} \in \mathcal{V}(H)$ ist. Oder anders ausgedrückt: Die Erweiterung von H um \mathbf{r} darf keine Rangänderung bewirken. Es muss also

$$\text{rang}(H) = \text{rang}([H\mathbf{r}]) \quad (3.14)$$

gelten, wobei

$$[H\mathbf{r}] = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1M} & r_1 \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2M} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NM} & r_N \end{pmatrix} = (\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \cdots \mathbf{h}_M \mathbf{r}) \quad (3.15)$$

eine zusammengesetzte Matrix ist. Da die Elemente von H alle unabhängig voneinander sind, kann mit Wahrscheinlichkeit 1 vorausgesetzt werden, dass H stets vollen Rang besitzt:

$$\text{rang}(H) = \min\{M, N\} \stackrel{(3.1)}{=} M \quad . \quad (3.16)$$

Es besteht allerdings die Schwierigkeit, dass im realen System der Rauschvektor \mathbf{n} eben doch $\neq 0$ ist. \mathbf{r} ist daher im Allgemeinen $\notin \mathcal{V}(H)$. Dies führt unweigerlich stets zu einer Erhöhung des Ranges der zusammengesetzten Matrix $[H\mathbf{r}]$, und (3.11) besitzt keine Lösung. Das heißt, für jeden beliebigen Vektor \mathbf{a} gilt

$$\mathbf{r} \neq H\mathbf{a} \quad . \quad (3.17)$$

Andererseits lässt sich aus

$$\Delta = \|\mathbf{r} - H\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{r} - H\mathbf{a})^* (\mathbf{r} - H\mathbf{a}) > 0 \quad (3.18)$$

eine Bestapproximation (optimale Lösung) bestimmen. Dabei stellt $\|\cdot\|$ die euklidische Norm eines Vektors dar. Man sucht nach derjenigen Lösung \mathbf{a}_0 , für die Δ minimal wird. Es gilt also

$$\|\mathbf{r} - H\mathbf{a}_0\|^2 \leq \|\mathbf{r} - H\mathbf{a}\|^2 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^M \quad . \quad (3.19)$$

Es ist bekannt [25, 27], dass diese optimale Lösung \mathbf{a}_0 durch

$$\mathbf{a}_0 = H^\dagger \mathbf{r} \quad (3.20)$$

berechnet wird. Dabei ist H^\dagger die so genannte Pseudoinverse von H . Deren Eigenschaften werden im nächsten Unterkapitel kurz dargestellt.

Die Lösung von (3.11) erhält man schließlich durch

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_0 \quad (3.21)$$

3.1.2.1 Die Pseudoinverse

Die Pseudoinverse ist auch unter den Namen Moore-Penrose-Inverse oder verallgemeinerte Inverse bekannt und basiert auf der Gaußschen Transformation [30]. In dieser Arbeit wird der Begriff Pseudoinverse verwendet.

Die Pseudoinverse H^\dagger einer Matrix H ist diejenige eindeutige und stets existente Matrix, welche die folgenden vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt²:

$$HH^\dagger H = H \quad (3.22)$$

$$H^\dagger HH^\dagger = H^\dagger \quad (3.23)$$

$$(HH^\dagger)^* = HH^\dagger \quad (3.24)$$

$$(H^\dagger H)^* = H^\dagger H \quad (3.25)$$

Die Pseudoinverse H^\dagger von H hat darüber hinaus folgende Eigenschaften:

- Wenn H eine Matrix mit N Zeilen und M Spalten ist, dann hat H^\dagger M Zeilen und N Spalten.
- Wenn H quadratisch und regulär ist, dann ist die Pseudoinverse gleich der herkömmlichen Inversen:

$$H^\dagger = H^{-1} \quad (3.26)$$

- Hat die $N \times M$ -Matrix H den Rang M dann gilt

$$H^\dagger = (H^* H)^{-1} H^* \quad (3.27)$$

und

$$H^\dagger H = I_M \quad (3.28)$$

²Diese vier Bedingungen heißen auch *Penrose-Gleichungen*.

- Hat die $N \times M$ -Matrix H den Rang N dann gilt

$$H^\dagger = H^* (HH^*)^{-1} \quad (3.29)$$

und

$$HH^\dagger = I_N \quad . \quad (3.30)$$

Die Pseudoinverse kann auch über die folgenden beiden Grenzbetrachtungen definiert werden [28]:

$$H^\dagger = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (H^*H + \varepsilon I_M)^{-1} H^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H^* (HH^* + \varepsilon I_N)^{-1} \quad (3.31)$$

Hilfreich ist darüber hinaus noch folgender

Satz 1. *Wenn die m -te Spalte von H ein Nullvektor ist, dann ist die m -te Zeile von H^\dagger ein Zeilen-Nullvektor.*

Der Beweis dafür ist in Anhang A.1 erbracht.

Eine schnelle und numerisch stabile Berechnung ist mit

Satz 2. *Sei $H = UDV^*$ eine Singulärwertzerlegung von H . Dann ist $H^\dagger = VD^\dagger U^*$ die Pseudoinverse von H . Dabei ist D^\dagger diejenige Matrix, die entsteht, wenn man von allen von Null verschiedenen Elementen von D den Kehrwert bildet und die Matrix transponiert.*

möglich [28]. Da jede beliebige Matrix eine Singulärwertzerlegung besitzt, impliziert dieser Satz, dass jede Matrix eine Pseudoinverse besitzt.

Aus (3.28) ist der Name *zero-forcing* für dieses Detektionsverfahren wieder ersichtlich. Die Multiplikation der Pseudoinversen mit der Kanalmatrix ergibt die Einheitsmatrix. Das bedeutet, alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen von H werden zu 0 erzwungen.

Gleichung (3.26) besagt, dass die herkömmliche Inverse ein Spezialfall der Pseudoinversen darstellt. Aus diesem Grund braucht der Fall $M = N$ nicht mehr gesondert betrachtet werden, sondern ist als Grenzfall in $N \geq M$ enthalten.

Viele weitere Eigenschaften der Pseudoinversen sind in [31] aufgeführt.

Mit (3.16) und (3.27) ergibt sich also die Detektionsmatrix für den ZF-Algorithmus zu

$$W = (H^*H)^{-1} H^* = H^\dagger \quad . \quad (3.32)$$

3.1.3 Das detektionsgefilterte Rauschen

Mit Hilfe der Pseudoinversen lässt sich ein Schätzwert für den Sendevektor \mathbf{s} aus dem Empfangsvektor \mathbf{r} detektieren. Dies wurde bereits in (3.11) durchgeführt und lautet verkürzt für den allgemeinen Fall $N \geq M$

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + H^\dagger \mathbf{n} \quad . \quad (3.33)$$

Es ist ersichtlich, dass das AWGN ebenfalls mit der Detektionsmatrix, der Pseudoinversen, multipliziert, also sozusagen gefiltert wird. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\tilde{\mathbf{n}} = H^\dagger \mathbf{n} \quad (3.34)$$

ergibt sich

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (3.35)$$

wobei $\tilde{\mathbf{n}}$ das detektionsgefilterte Rauschen ist. Man beachte dabei, dass \mathbf{n} N Komponenten und $\tilde{\mathbf{n}}$ M Komponenten besitzt. Schreibt man (3.35) komponentenweise, dann sieht man, dass durch die ZF-Detektion das ursprüngliche $M \times N$ -System in M entkoppelte 1×1 -Systeme transformiert worden ist, bei dem jedes y_j nur von s_j und nicht mehr von den anderen Sendesymbolen s_l ($l \neq j$) abhängt:

$$y_j = s_j + \tilde{n}_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.36)$$

Dabei ist

$$\tilde{n}_j = \mathbf{w}_j \mathbf{n} \quad (j = 1, \dots, M) \quad (3.37)$$

und \mathbf{w}_j ist der j -te Zeilenvektor der Detektionsmatrix W , die bei ZF die Pseudoinversen von H ist.

Eine Komponente n_i ($i = 1, \dots, N$) des Rauschvektors \mathbf{n} besitzt nach (2.16) die Varianz $2\sigma_n^2$, nämlich jeweils σ_n^2 im Real- und im Imaginärteil. Mit (3.37) ergibt sich die Varianz $\sigma_{\text{AWGN},j}^2$ ($j = 1, \dots, M$) einer Komponente \tilde{n}_j des detektionsgefilterten Rauschvektors $\tilde{\mathbf{n}}$ zu

$$\sigma_{\text{AWGN},j}^2 = 2\sigma_n^2 \cdot \sum_{i=1}^N |w_{ji}|^2 = 2\sigma_n^2 \cdot \|\mathbf{w}_j\|^2 \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.38)$$

Die Transformation in M entkoppelte 1×1 -Systeme nach (3.36) ist der Hauptgrund dafür, dass die Komplexität einer derartigen Detektion deutlich geringer ist als bei einer *maximum likelihood* oder MAP-Detektion, wie sie im Kapitel 3.6 vorgestellt wird. Eine nachfolgende Symbol- und eventuell Bitschätzung ist auf einzelne Symbole s_j beschränkt und muss nicht den gesamten Symbolvektor \mathbf{s} berücksichtigen.

Abbildung 3.2 vergleicht zwei verschiedene MIMO-Systeme jeweils im codierten und im uncodierten Fall. Erwartungsgemäß haben die codierten Systeme bei großem SNR eine geringere BER. Ebenso schlägt sich eine geringere Anzahl an Sendeantennen bei gleich bleibender Empfängeranzahl positiv auf die BER nieder, was aber auch eine Reduzierung der Übertragungsrate mit sich bringt.

Der Verlauf der BER der uncodierten Systeme spiegelt die so genannte Diversität wider: Wie im nächsten Kapitel in (3.46) angegeben wird, hat das 4×4 -System einen Diversitätsgrad von 1. Das 2×4 -System besitzt die Diversität 3. Für sehr hohe SNR fällt die BER um so viele Größenordnungen pro 10 dB, wie es dem Grad der Diversität entspricht [32]. Das heißt, dass beispielsweise die BER des *uncodierten* 2×4 -Systems für große SNR bei einer SNR-Erhöhung von 10 dB um 3 Zehnerpotenzen fällt.

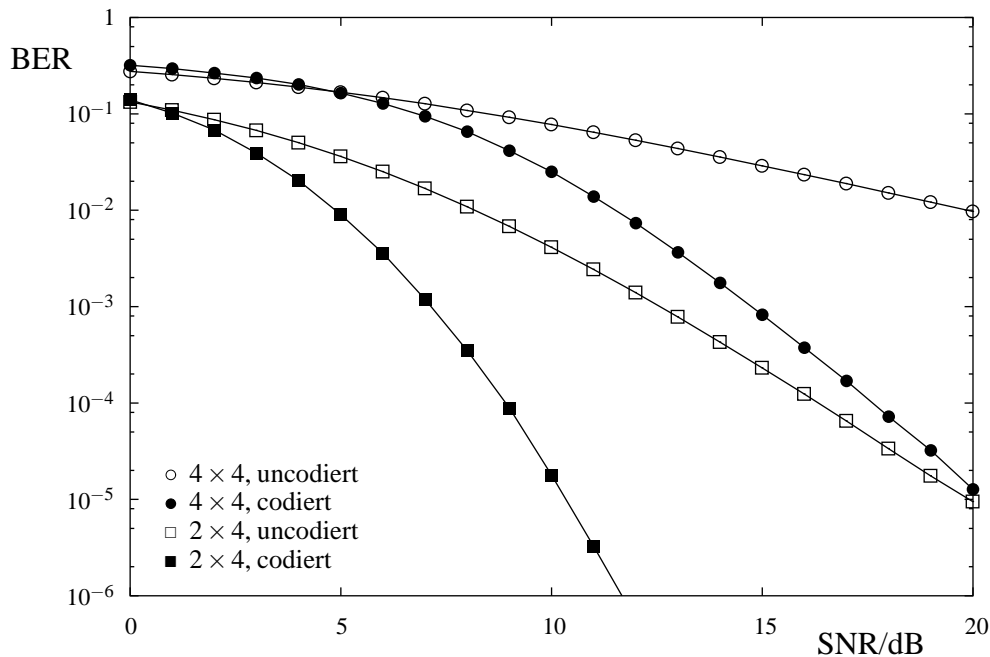


Abbildung 3.2: BER für ZF, QPSK, Gray Mapping, codiert und uncodiert, 2×4 und 4×4

3.2 Zero-Forcing-Entzerrung mit sequentieller Symbolauslöschung

In diesem Unterkapitel wird die ZF-Entzerrung durch eine sukzessive Symbolauslöschung (SAL) erweitert. In der Literatur ist sie unter dem Namen *ordered successive interference cancellation* (OSIC) bekannt [33,34]. Da durch dieses Verfahren allerdings nicht alle vorhandenen Interferenzen subtrahiert und damit gelöscht werden und es später auch noch in einem allgemeineren Rahmen betrachtet wird, bezeichne ich es genauer als das, was es tatsächlich ist, nämlich eine sequentielle Symbolauslöschung. Es handelt sich hierbei im Grunde um das Gaußsche Eliminationsverfahren. Das bedeutet, ein detektiertes Symbol wird subtrahiert und mit dem verbliebenen Gleichungssystem das nächste Symbol bestimmt. Dies führt man solange fort, bis alle Symbole detektiert worden sind. Eine zusätzliche Verbesserung wird dadurch erreicht, dass die Elimination in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt wird. Dies ist zunächst nicht sofort einleuchtend, da bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems – wie es (2.20) darstellt – die Reihenfolge, in der die Unbekannten ermittelt werden, eigentlich egal ist. Das AWGN spielt hier jedoch eine Rolle, so dass durch eine im gewissen Sinn optimale Reihenfolge die Bitfehlerhäufigkeit nochmals gesenkt werden kann.³

Bei der ZF-Entzerrung mit sequentieller Symbolauslöschung handelt es sich um den ersten implementierten Algorithmus, der unter dem inzwischen bekannten Namen *V-BLAST*

³Man beachte, dass diese Art der Symbolauslöschung die sequentielle Detektion explizit voraussetzt. Bei der parallelen Detektion gibt es keine Detektionsreihenfolge, da die Symbole gleichzeitig detektiert werden.

(Vertical - Bell Laboratories Layered Space-Time) in die noch junge Geschichte der MIMO-Forschung einging [33, 34].

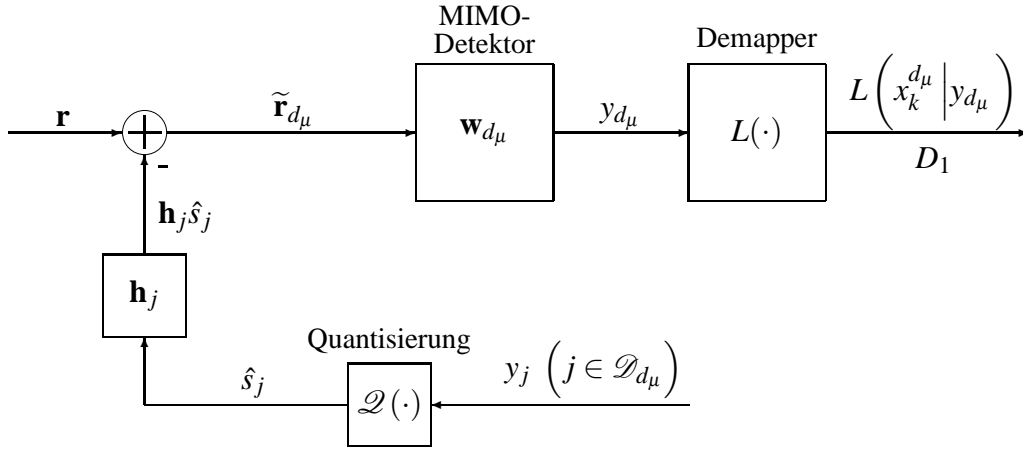


Abbildung 3.3: Aufbau eines MIMO-Detektors mit sequentieller Symbolauslösung und anschließendem Demapping

Das Blockschaltbild ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Die darin verwendeten Bezeichnungen werden im Verlauf des Kapitels 3.2 einschließlich seiner Unterkapitel erklärt.

Aus dem Blockschaltbild ist ersichtlich, dass zur Detektion zunächst eine Subtraktion von $\mathbf{h}_j \hat{s}_j$ ($j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$) durchgeführt wird. Die Bezeichnung \mathcal{D}_{d_μ} wird später in Kapitel 3.2.2 erklärt. An dieser Stelle ist es ausreichend zu wissen, dass es sich hierbei um die Menge der Indizes derjenigen Symbole handelt, die in den Detektionsschritten $1, 2, \dots, \mu - 1$ bereits detektiert worden sind⁴. Für den ersten Detektionsschritt ($\mu = 1$) gibt es noch keine Symbole, die bereits detektiert sind, das heißt $\mathcal{D}_{d_1} = \{\}$, und es folgt (siehe Blockschaltbild)

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_1} = \mathbf{r} \quad . \quad (3.39)$$

Wie bei der bisherigen ZF-Entzerrung, wird nach der Subtraktion die Detektionsmatrix bestimmt. Anstatt jedoch mit Hilfe dieser Detektionsmatrix den kompletten Sendevektor parallel zu ermitteln, wird nur eine Zeile der Detektionsmatrix verwendet, um im allerersten Detektionsschritt ($\mu = 1$) zunächst nur eine Komponente s_{d_1} ($d_1 \in \{1, \dots, M\}$) des Sendevektors zu bestimmen.

$$y_{d_1} = \mathbf{w}_{d_1} \tilde{\mathbf{r}}_{d_1} = \mathbf{w}_{d_1} \mathbf{r} \stackrel{(3.12)}{=} s_{d_1} + \sum_{i=1}^N w_{d_1 i} n_i = s_{d_1} + \tilde{n}_{d_1} \quad . \quad (3.40)$$

Der Index d_1 oder allgemein d_μ trägt dabei der Tatsache Rechnung, dass die gesendeten Symbole s_{d_j} ($j = 1, \dots, M$) bei der sequentiellen Detektion nicht unbedingt in aufsteigender Reihenfolge detektiert werden müssen. Dieser Sachverhalt wird in Kapitel 3.2.2 noch

⁴Die Detektionsschritte zur Detektion der Symbole eines Symbolvektors werden hier und in späteren Kapiteln mit μ nummeriert. Ein Detektionsschritt umfasst die vollständige Bestimmung eines Sendesymbols. Um den gesamten Sendevektor zu detektieren, sind also M Detektionsschritte notwendig.

ausführlich – auch an einem Beispiel – erläutert. Mit (3.8) bestimmt man nun einen Schätzwert für dieses Sendesymbol

$$\hat{s}_{d_1} = \mathcal{Q}\{y_{d_1}\} \quad (3.41)$$

und subtrahiert dieses Symbol nach der Rekonstruktion mit der entsprechenden Spalte der Kanalmatrix vom ursprünglichen Empfangsvektor, um die Detektion des nächsten Symbols vorzubereiten:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = \mathbf{r} - \mathbf{h}_{d_1} \hat{s}_{d_1} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} - \mathbf{h}_{d_1} \hat{s}_{d_1} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \mathbf{h}_{d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Unter der Voraussetzung, dass das erste Symbol mit

$$s_{d_1} = \hat{s}_{d_1} \quad (3.44)$$

durch den Quantisierer richtig geschätzt wurde (was für große SNR eine durchaus sinnvolle näherungsweise Annahme darstellt), fällt der letzte Term weg⁵, und es bleibt nach dem ersten Detektions- und Symbolauslöschungsschritt und damit vor der Detektion des zweiten Symbols mit

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} \quad (3.45)$$

ein MIMO-System zurück, das gedanklich eine Sendeantenne weniger (s_{d_1} fällt weg), aber die gleiche Anzahl an Empfangsantennen ($\tilde{\mathbf{r}}_{d_2}$ hat immer noch N Komponenten) besitzt. Von dieser Gleichung ausgehend wird dann das nächste Symbol detektiert, dann subtrahiert und so weiter, bis alle M Symbole detektiert worden sind.

Mathematisch bedeutet (3.45), dass die Anzahl der Gleichungen gleich bleibt, aber die Anzahl der Unbekannten um ein Element reduziert wurde. Das soeben detektierte Symbol wird gelöscht – daher der Name *Symbolauslöschung* für das Verfahren. Weil die Subtraktion auf einer starren Quantisierung beruht, spricht man in der Literatur von *hard cancellation* (*to cancel* = löschen, subtrahieren).

Es bleibt noch der Hinweis, dass die sequentielle Symbolauslöschung mit so genanntem *soft cancellation* in [35] kombiniert wurde. Dabei wird nicht das quantisierte Symbol, sondern dessen Erwartungswert subtrahiert. Die Verbesserungen der BER waren jedoch nur gering. In einer anderen Empfängerstruktur in Kapitel 4.1.3 wird die Idee des *soft cancellation* allerdings nochmals aufgegriffen.

⁵Die Auswirkungen von $s_{d_1} \neq \hat{s}_{d_1}$ und allgemein $s_{d_\mu} \neq \hat{s}_{d_\mu}$ ($\mu = 1, \dots, M$) werden ab Kapitel 3.4 berücksichtigt.

Gleichung (3.44) wird in der Literatur (häufig stillschweigend) vorausgesetzt (zum Beispiel [15, 33–35]). Wie wir sehen werden, ist diese Annahme in uncodierten, nichtiterativen Systemen auch ohne nachteilige Folgen. Wie die theoretischen Überlegungen und Simulationsergebnisse später zeigen werden, ist dies in codierten Systemen nicht mehr der Fall⁶. Daher wurde in der Literatur seither üblicherweise in codierten und iterativen Systemen auf die sequentielle Detektion verzichtet und ausschließlich die parallele Detektion angewandt (zum Beispiel [21, 36]).

Die Differenz der Anzahl der Empfangs- und (virtuellen) Sendeantennen hat sich nach der Symbolauslöschung um 1 erhöht. Man spricht deshalb von einer Diversitätserhöhung um 1. Die Diversität D eines uncodierten MIMO-Systems wird allgemein durch

$$D = N - M + 1 \quad (3.46)$$

festgelegt und kann für $N \geq M$ die Werte $1, \dots, N$ annehmen⁷. Das virtuell senderreduzierte System lässt sich wieder in Matrixschreibweise darstellen, wobei die entsprechenden Elemente in den Matrizen und Vektoren zu 0 gesetzt werden müssen. Sei zum Beispiel $d_1 = 2$ (das bedeutet im ersten Detektionsschritt wird das Symbol der zweiten Sendeantenne detektiert), so ergibt sich gedanklich

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & \cdots & h_{1M} \\ h_{21} & 0 & h_{23} & \cdots & h_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & 0 & h_{N3} & \cdots & h_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Diese Gleichung besagt, dass man nun ein MIMO-System vor sich hat, bei dem das Symbol s_2 überhaupt nicht mehr auftritt. In den weiteren Detektionsschritten kann man also von einem reduzierten MIMO-System (siehe Kapitel 3.2.1) ausgehen. Genau genommen reicht es (mathematisch) aus, entweder den entsprechenden Eintrag im Vektor \mathbf{s} oder die entsprechende Spalte in der Matrix H zu 0 zu setzen. Es ist allerdings konsequent, dies bei beiden zu tun. In den beiden folgenden Unterkapiteln wird eine (mehr oder weniger) elegante Schreibweise zur Beschreibung der notwendigen Gleichungen eingeführt.

3.2.1 Das reduzierte MIMO-System

In Übereinstimmung mit der Literatur [34] wird im Folgenden mit $H_{\overline{\mathcal{B}}}$ diejenige Matrix bezeichnet, die aus H entsteht, wenn man diejenigen *Spalten* zu 0 setzt, deren Indizes in der Menge \mathcal{B} enthalten sind. Eine entsprechende Schreibweise gilt für Vektoren, bei denen die

⁶Eine Ausnahme bilden horizontalcodierte MIMO-Systeme, bei denen vor der Subtraktion eine Fehlerkorrektur durchgeführt wird und dadurch die Annahme (3.44) stärker gerechtfertigt ist.

⁷Man beachte, dass bei codierten Systemen noch eine weitere Diversitätssteigerung (*diversity gain*) eintritt, die hier jedoch nicht näher behandelt wird.

einzelnen Vektorelement zu 0 gesetzt werden. Analog sei mit $\overline{H}_{\mathcal{B}}$ diejenige Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn man die *Zeilen*, deren Indizes in der Menge \mathcal{B} enthalten sind, zu 0 setzt. Damit kann man (3.47) in der Kurzform

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = \overline{H}_{\{d_1\}} \cdot \overline{\mathbf{s}}_{\{d_1\}} + \mathbf{n} \quad (3.48)$$

darstellen. Gleichung (3.48) stellt das reduzierte MIMO-System für den folgenden zweiten Detektionsschritt dar. Ausgehend von $\overline{H}_{\{d_1\}}$ berechnet man eine neue Detektionsmatrix und bestimmt mit einer Zeile der neuen Detektionsmatrix das nächste Symbol y_{d_2} . Der Quantisierer bildet einen Schätzwert \hat{s}_{d_2} , und dann subtrahiert man diesen Schätzwert wiederum vom verbliebenen Empfangsvektor. Auf diese Weise erhält man durch sukzessive Symbolauslöschung schrittweise Schätzwerte aller M Symbole eines Sendevektors. Während der Berechnung erhöhen sich sowohl die Anzahl der Nullspalten in der Kanalmatrix als auch die Anzahl der Nullelemente im Sendevektor. Für spätere Überlegungen ist es wichtig, noch auf die Tatsache hinzuweisen, dass durch diese Vorgehensweise automatisch sowohl unquantisierte als auch quantisierte Schätzwerte eines Sendesymbols s_j vorliegen, nämlich y_j und \hat{s}_j ($j = 1, \dots, M$). Bei eventuellen nachfolgenden Rechenschritten kann man also ohne Mehraufwand auf beide Größen zurück greifen. Weil die Komponenten des Sendevektors in diesem Fall nacheinander detektiert werden, spricht man von *sequentieller Detektion*. Für den nächsten Detektionsschritt ergibt sich analog

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_3} = \overline{H}_{\{d_1, d_2\}} \cdot \overline{\mathbf{s}}_{\{d_1, d_2\}} + \mathbf{n} \quad (3.49)$$

Der Index d_3 von $\tilde{\mathbf{r}}_{d_3}$ besagt, dass alle Subtraktionen durchgeführt wurden, die für den dritten Detektionsschritt bei der jeweiligen Detektionsmethode notwendig sind. Man kann sofort erkennen, dass diese spezielle Matrix-Notation insbesondere bei vielen Detektionsschritten kompliziert erscheint. Im nächsten Unterkapitel werden deshalb so genannte Indexmengen eingeführt und teilweise von der Matrixschreibweise zur Summenschreibweise übergegangen. Zunächst folgen aber noch einige Überlegungen zur Verringerung des Rechenaufwands.

Bei dieser sequentiellen Vorgehensweise werden $M - 1$ verschiedene Detektionsmatrizen berechnet, deren zu Grunde liegende Ausgangsmatrix mindestens eine Nullspalte enthält. Da bei der ZF-Entzerrung die Pseudoinverse als Detektionsmatrix verwendet wird, kann man Satz 1 auf Seite 22 für eine effizientere Berechnung verwenden. Diese effizientere Berechnung wird nun kurz erläutert. Bezeichnet man mit $H_{\mathcal{B}}$ diejenige Matrix, die aus H entsteht, wenn man die *Spalten*, deren Indizes in der Menge \mathcal{B} enthalten sind, nicht nur zu 0 setzt, sondern komplett löscht und mit $\mathbf{s}_{\mathcal{B}}$ denjenigen Vektor, der aus \mathbf{s} entsteht, wenn man die Elemente, deren Indizes in der Menge \mathcal{B} enthalten sind, löscht, erhält man die mathematische Beschreibung des um das Element d_1 reduzierten Systems:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = H_{\underline{\{d_1\}}} \cdot \mathbf{s}_{\underline{\{d_1\}}} + \mathbf{n} \quad (3.50)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Struktur wie (3.48) und $\tilde{\mathbf{r}}_{d_2}$ ist in beiden Gleichungen identisch. Der Unterschied besteht allerdings in den Dimensionen der Matrix $H_{\underline{\{d_1\}}}$ und des Vektors $\mathbf{s}_{\underline{\{d_1\}}}$. Daher ist es egal, ob man die Matrix $\overline{H}_{\{d_1\}}$ oder $H_{\underline{\{d_1\}}}$ zur Bestimmung der Detektionsmatrix benutzt.

Analog zu vorhin sei mit $\underline{\mathcal{B}}H$ diejenige Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn man die Zeilen, deren Indizes in der Menge \mathcal{B} enthalten sind, nicht nur zu 0 setzt, sondern komplett löscht. Ausgehend von (3.50) bestimmt man nun die Detektionsmatrix der um eine Spalte reduzierten Matrix $H_{\{d_1\}}$. Nun lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 3. Die Pseudoinverse von $H_{\{d_1\}}$ hängt mit der Pseudoinversen von $H_{\overline{\{d_1\}}}$ über die Beziehung

$$\left(H_{\{d_1\}}\right)^\dagger = \underline{\{d_1\}} \left(\left(H_{\overline{\{d_1\}}}\right)^\dagger\right) \quad (3.51)$$

zusammen.

In Worten bedeutet dies: Wenn man von einer Matrix H die d_1 -te Spalte zu Null setzt, dann die Pseudoinverse bildet und von dieser Pseudoinversen die d_1 -te Zeile (das ist dann die Nullvektor-Zeile, vgl. Satz 1) löscht, dann führt dies auf dasselbe Ergebnis, wie wenn man zunächst die d_1 -te Spalte von H komplett löscht und danach die Pseudoinverse bildet. Der Beweis dafür steht im Anhang A.1.

Um die Berechnungskomplexität zu reduzieren, arbeitet man also nicht mehr mit den zu 0 gesetzten Matrix- und Vektorelementen. Statt dessen werden Matrizen und Vektoren benutzt, die in ihren Dimensionen reduziert sind. Für das erste zu detektierende Symbol muss die Detektionsmatrix für eine $N \times M$ -Matrix berechnet werden. Für das nächste Symbol hat die Matrix noch eine Größe von $N \times (M - 1)$. Für das letzte zu detektierende Symbol muss lediglich die Detektionsmatrix für eine $N \times 1$ -Matrix bestimmt werden.

Um die Reduzierung des Rechenaufwands abzuschätzen, werden die Anzahl der benötigten Operationen beziehungsweise die Komplexität bei den Matrixmultiplikationen und Matrixinversionen betrachtet.

- Im herkömmlichen Fall, also bei M -maliger Anwendung von (3.32), muss jedes Mal eine $M \times M$ -Matrix invertiert werden. Außerdem muss jedes Mal eine $M \times N$ -Matrix mit einer $N \times M$ -Matrix sowie eine $M \times M$ -Matrix mit einer $M \times N$ -Matrix multipliziert werden. Die Rechenkomplexität bezüglich der Inversion ist damit bei M -maliger Anwendung proportional zu $M \cdot M^3 = M^4$. Dabei wurde wie allgemein üblich die Komplexität für die Berechnung der Inversen einer $M \times M$ -Matrix als proportional zu M^3 angenommen. Desweiteren erfordert die Multiplikation einer $k \times l$ -Matrix mit einer $l \times v$ -Matrix $k \cdot l \cdot v$ skalare Multiplikationen. Bei M -maliger Multiplikation einer $M \times N$ -Matrix mit einer $N \times M$ -Matrix und einer $M \times M$ -Matrix mit einer $M \times N$ -Matrix, werden also $M \cdot 2 \cdot NM^2 = 2NM^3$ skalare Multiplikationen benötigt.
- Bei der Verwendung von größenreduzierten Matrizen, ist die Komplexität bezüglich der M -maligen Matrixinversion proportional zu

$$M^3 + (M - 1)^3 + \dots + 2^3 + 1^3 = \frac{M^2 (M + 1)^2}{4} \quad (3.52)$$

Damit sinkt der Rechenaufwand für die sequentielle Berechnung der M verschiedenen Detektionsmatrizen bezüglich der Matrixinversionen um den Faktor $\frac{4M^2}{(M+1)^2} < 4$. Zusätzlich müssen lediglich

$$2N \left(M^2 + (M-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 \right) = \frac{1}{3} NM (2M+1) (M+1) \quad (3.53)$$

skalare Additionen durchgeführt werden. Damit sinkt der Rechenaufwand bezüglich der Matrixmultiplikationen um den Faktor $\frac{6M^2}{(2M+1)(M+1)} < 3$.

Bei Verwendung der größenreduzierten Matrizen lässt sich der Rechenaufwand also bezüglich der Matrixinversionen bis maximal um den Faktor 4 und bezüglich der Matrixmultiplikationen bis maximal um den Faktor 3 reduzieren. Zum Schluss der Berechnung muss die zuvor entfernte Nullzeile wieder eingefügt werden, damit die Matrixdimension wieder stimmt.

Auch wenn mit den größenreduzierten Matrizen Rechenaufwand eingespart wird, so stellt sich dennoch die Frage, warum man überhaupt die Detektion mit sequentieller Symbolauslöschung durchführt. Ohne die sequentielle Symbolauslöschung muss man nämlich nur einmal eine $M \times M$ -Matrix invertieren, eine $M \times N$ -Matrix mit einer $N \times M$ -Matrix und eine $M \times M$ -Matrix mit einer $M \times N$ -Matrix multiplizieren. Dies ist erheblich weniger Aufwand als bei einer Detektion mit sequentieller Symbolauslöschung. Wie die Simulationsergebnisse später allerdings zeigen werden, erhält man bei Verwendung der sequentiellen Symbolauslöschung durch die Diversitätserhöhung im interessierenden SNR-Bereich eine deutliche Reduzierung der Bitfehlerhäufigkeit.

Im rauschfreien Fall ist die Reihenfolge, mit der die Symbole nach und nach detektiert werden, ganz offensichtlich egal. Schließlich handelt es sich im Grunde um ein Eliminationsverfahren. Im rauschbehafteten, realen MIMO-System werden die Elemente des Rauschvektors \mathbf{n} durch die Linksmultiplikation mit einer Zeile \mathbf{w}_j der Detektionsmatrix gewichtet und damit verändert (siehe Kapitel 3.1.3, (3.37)). Es ist daher vorstellbar, dass so etwas wie eine optimale Reihenfolge existiert.

Bevor wir uns diese optimale Detektionsreihenfolge genauer anschauen, ist es von Vorteil, einige *Indexmengen* zu definieren, die später die Notation vereinfachen werden. Diese Indexmengen wurden implizit schon in diesem Kapitel verwendet und werden im gesamten weiteren Verlauf immer wieder verwendet werden.

3.2.2 Einführung von Indexmengen

In der Menge \mathcal{D} sind die Indizes aller Sendesymbole eines Sendevektors zusammengefasst. Da ein Sendevektor M verschiedene Sendesymbole enthält, gilt

$$\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, M\} \quad . \quad (3.54)$$

Aus den M Symbolen s_1, \dots, s_M werde nun ein spezielles Symbol s_{d_μ} betrachtet, das im μ -ten Detektionsschritt ($\mu = 1, \dots, M$) detektiert werden soll. Bei sequentieller⁸ Detektion kennzeichne \mathcal{D}_{d_μ} nun die Indexmenge derjenigen Symbole, die zum Zeitpunkt der Detektion von s_{d_μ} bereits detektiert worden sind. Mit $\overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}$ werde die Indexmenge derjenigen Symbole bezeichnet, die zu diesem Zeitpunkt noch nicht detektiert worden sind, wobei das gerade detektierte Symbol s_{d_μ} darin nicht mehr enthalten sei. Es gilt also

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{d_\mu} \cup \{d_\mu\} \cup \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}} . \quad (3.55)$$

Diese Definitionen schließen die Grenzfälle

$$\mathcal{D}_{d_1} = \{ \} \quad (3.56)$$

und

$$\overline{\mathcal{D}_{d_M}} = \{ \} \quad (3.57)$$

ein.

Dazu ein Zahlenbeispiel zur Verdeutlichung: Wenn das MIMO-System aus $M = 4$ Sendern besteht, ist $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4\}$. Angenommen, die Detektionsreihenfolge sei s_3, s_1, s_2, s_4 , also $d_1 = 3, d_2 = 1, d_3 = 2$ und $d_4 = 4$. Das bedeutet s_3 wird zuerst detektiert, danach s_1 und so weiter. An der Stelle, an der nun zum Beispiel s_2 detektiert wird (für den dritten Detektionsschritt ist $\mu = 3$), ist $\mathcal{D}_{d_\mu} = \mathcal{D}_{d_3} = \{1, 3\}$, $\overline{\mathcal{D}_{d_\mu}} = \overline{\mathcal{D}_{d_3}} = \{4\}$ und $d_\mu = d_3 = 2$.

Mit diesen Indexmengen lassen sich jetzt einige Gleichungen umformulieren und leicht für einen beliebigen Detektionsschritt μ ($\mu = 1, \dots, M$) erweitern. Es folgt im allgemeinen Fall aus (3.42)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} &= \mathbf{r} - \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \\ &= \sum_{j=1}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} - \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \\ &= \sum_{j \in \mathcal{D}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} - \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \\ &= \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j s_j - \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \\ &= \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) , \end{aligned} \quad (3.58)$$

aus (3.45)

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.59)$$

⁸Das bedeutet, die Symbole werden nacheinander und nicht gleichzeitig detektiert.

und aus (3.48)

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \mathbf{H}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}} \cdot \mathbf{s}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}} + \mathbf{n} \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.60)$$

Mit $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}$ wird die Komplementärmenge (oder das Komplement) von \mathcal{D}_{d_μ} bezüglich \mathcal{D} bezeichnet. Es enthält alle Elemente, die in \mathcal{D} , aber nicht in \mathcal{D}_{d_μ} enthalten sind. $\mathbf{H}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}}$ und $\mathbf{s}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}}$, bei denen die Elemente aus \mathcal{D}_{d_μ} zu Null gesetzt werden, dürfen dabei nicht mit $\mathbf{H}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}}$ und $\mathbf{s}_{\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}}$ verwechselt werden, bei denen die Elemente aus $\overline{\mathcal{D}}_{d_\mu}$ zu Null gesetzt werden.

Nach der Detektion mit \mathbf{w}_{d_μ} ergibt sich als Verallgemeinerung von (3.40)

$$\begin{aligned} y_{d_\mu} &= \mathbf{w}_{d_\mu} \tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} \\ &= s_{d_\mu} + \tilde{n}_{d_\mu} \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Diese Gleichung sieht genau so aus wie (3.36) bei der Entzerrung ohne sequentielle Symbolauslöschung. Es wurde mit d_μ lediglich die Detektionsreihenfolge berücksichtigt. Allerdings ist die Berechnung von \mathbf{w}_{d_μ} in beiden Fällen natürlich unterschiedlich, da sich die Kanalmatrix bei der sequentiellen Symbolauslöschung durch Nullsetzen beziehungsweise Auslöschen von Elementen mit jedem Detektionsschritt verändert. In der Folge sind auch die Zeilen \mathbf{w}_{d_μ} von denen der vollbesetzten Detektionsmatrix \mathbf{W} verschieden. Auch gilt (3.61) nur unter der Voraussetzung

$$s_{d_j} = \hat{s}_{d_j} \quad \forall j \in \mathcal{D}_{d_\mu} \quad . \quad (3.62)$$

Man beachte nochmals, dass im μ -ten Detektionsschritt für die Gültigkeit von (3.61) nur die richtige Quantisierung der bisher detektierten Symbole ($j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$) gefordert werden muss.

3.2.3 Die optimale Detektionsreihenfolge bei ZF

Nach (3.38) besitzen die einzelnen Komponenten \tilde{n}_j des detektionsgefilterten Rauschens die Varianz

$$\sigma_{\text{AWGN}, j}^2 = 2\sigma_n^2 \cdot \sum_{i=1}^N |w_{ji}|^2 \quad (j = 1, \dots, M) \quad , \quad (3.63)$$

die im Allgemeinen für jedes j unterschiedlich ist. Außerdem haben die gesendeten Symbole nach (2.13) jeweils die mittlere Signalenergie E_s . Für ein Symbol y_j nach der Detektion, das als Grundlage für die Symbolentscheidung dient, lässt sich mit

$$\frac{E_s}{\sigma_{\text{AWGN}, j}^2} \quad (j = 1, \dots, M) \quad (3.64)$$

eine Art *Post-Detektions-SNR* definieren. Man spricht von *Post-Detektion*, da es erst nach der Detektion mit einer Zeile der Detektionsmatrix auftritt (*post* = danach).

Im Allgemeinen sind also gemäß (3.61) alle Symbole nach der Detektion mit Rauschen unterschiedlicher Varianz beaufschlagt. Daher ist es nahe liegend, bei der Detektion mit dem Symbol zu beginnen, dessen zugehöriges Post-Detektions-SNR den größten Wert aufweist,

und bei jedem Detektionsschritt das jeweils nächstkleinere Post-Detektions-SNR zu suchen. Da der Zähler in (3.64) für alle Symbole gleich ist, sucht man also gemäß (3.63) für den μ -ten Detektionsschritt das Symbol, für das die Norm der entsprechenden j -ten Zeile der Detektionsmatrix minimal ist:

$$\min_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}} \left\{ \|\mathbf{w}_j\|^2 \right\} \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.65)$$

Nachdem über die minimale Norm festgestellt wurde, welches Symbol die kleinste Rauschvarianz besitzt, wird dieses Symbol detektiert und subtrahiert. Danach bestimmt man die nächste Detektionsmatrix und sucht dort wieder nach der minimalen Zeilennorm. Auf diese Weise wird während der Detektion des gesamten Vektors eine Detektionsreihenfolge berechnet und angewendet. Dass dieses Vorgehen die optimale Detektionsreihenfolge darstellt, wurde in [33] bewiesen. Zu beachten ist dabei, dass sich diese optimale Detektionsreihenfolge auf Symbolfehler bezieht, weil der MIMO-Detektor ausschließlich auf uncodierter Symbolebene arbeitet. Das heißt, diese Detektionsreihenfolge minimiert nicht notwendigerweise auch die BER im uncodierten, geschweige denn im codierten System. Etwas anderes ist an dieser Stelle aber auch gar nicht möglich!

Der zusätzliche Rechenaufwand für die Bestimmung der optimalen Detektionsreihenfolge besteht darin, die Zeile der Detektionsmatrix mit der minimalen Norm herauszufinden. Im ersten Detektionsschritt erstreckt sich die Suche dabei über M Möglichkeiten, im zweiten Schritt über $M - 1$, usw. bis im letzten Schritt nur noch eine Zeile übrig bleibt und eine „Suche“ nicht mehr notwendig ist. Insgesamt sind also $M + (M - 1) + 2 = \frac{M(M+1)}{2} - 1$ Normberechnungen und Vergleichsoperationen notwendig. Das Post-Detektions-SNR eines Symbols verändert sich dabei nach jedem Detektionsschritt, weil stets eine neue Pseudoinverse berechnet wird. Es ist also nicht möglich, die komplette Detektionsreihenfolge gleich anhand der ersten Pseudoinversen zu bestimmen. Sie entsteht vielmehr während der Detektion.

Die Methode, wie hier die Detektionsreihenfolge bestimmt wurde, ist bereits auf den ersten Blick einleuchtend. Im Anhang A.4 wird eine allgemeinere Rechnung aufgezeigt, die auf dasselbe Ergebnis führt, jedoch in späteren Kapiteln bei der MMSE-Detektion noch weitere Verwendung finden wird.

Abbildung 3.4 stellt die BER von 4×4 -MIMO-Systemen mit paralleler Detektion und mit sequentieller Symbolauslöschung jeweils für den codierten und den uncodierten Fall gegenüber. Anhand dieser Abbildung lassen sich nun interessante Schlüsse ziehen. Betrachten man zunächst nur die beiden uncodierten Systeme, dann ist ersichtlich, dass die sequentielle Symbolauslöschung mit optimaler Detektionsreihenfolge bei einer BER von unter 10^{-2} einen Vorteil von etwa 7 dB gegenüber der parallelen Detektion bringt. Der Grund für die geringere BER liegt in der Diversitätserhöhung nach (3.46): je höher die Diversität, desto geringer die Bitfehlerhäufigkeit. In [35] wird die Diversitätserhöhung beim uncodierten System genauer untersucht.

Völlig anders sieht es dagegen beim codierten System aus. Ohne die sequentielle Symbolauslöschung, also bei paralleler Detektion, zeigt die BER einen Verlauf, wie er erwartet wird.

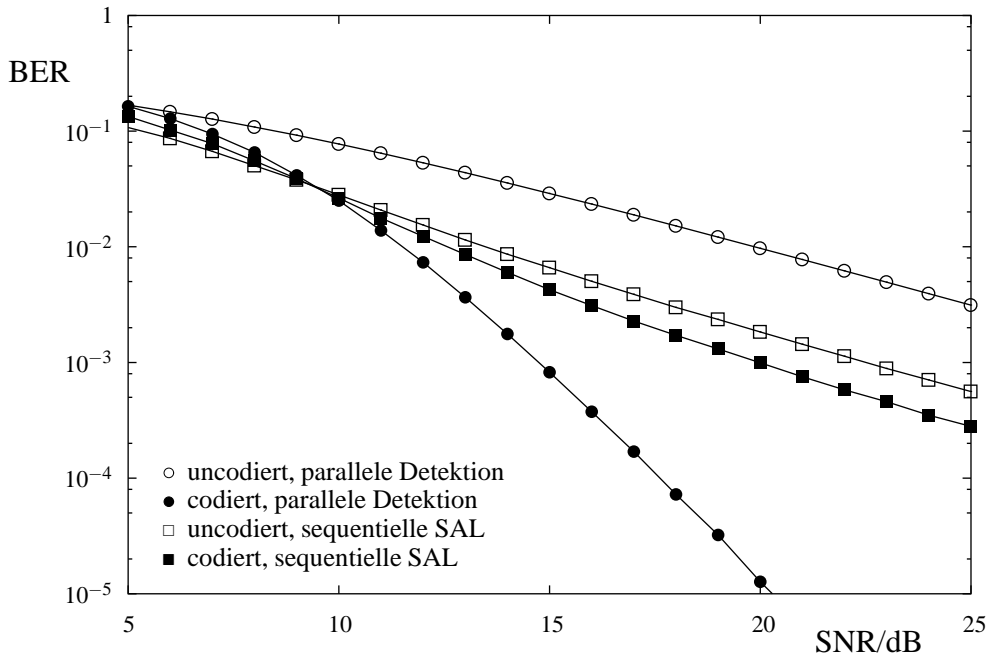


Abbildung 3.4: BER für ZF, QPSK, Gray Mapping, codiert und uncodiert, 4×4 , parallele Detektion und sequentielle Symbolauslöschung

Mit sequentieller Symbolauslöschung hat das codierte System aber prinzipiell den gleichen Verlauf wie das uncodierte System. Der Grund liegt schlichtweg in der Annahme (3.44). Der nachfolgende Demapper setzt beim codierten System in jedem Detektionsschritt eine korrekte Löschung ($s_{d_j} - \hat{s}_{d_j} = 0$) voraus. In der Folge werden die Beträge der L -Werte der Bits von später detektierten Symbolen wegen der (anscheinend⁹) höheren Diversität größer und vom Decoder als zuverlässiger angesehen. Dies trifft bei korrekter Löschung auch tatsächlich zu. Bei unvollständiger Löschung hat es aber negative Folgen auf die BER, wenn man weiterhin eine korrekte Löschung annimmt. Dies schlägt sich sichtbar auf die BER nieder: Die Steigung der BER des codierten Systems mit sequentieller Symbolauslöschung ist gleich wie diejenige der uncodierten Systeme. Die BER-Kurve des codierten Systems ohne sequentielle SAL ist deutlich steiler. Deshalb ist es unbedingt notwendig, die negativen Auswirkungen einer fehlerbehafteten Symbolauslöschung auf den Demapper zu berücksichtigen. Dies wird im Kapitel 3.4.1 erfolgen.

Abbildung 3.5 zeigt die BER eines uncodierten MIMO-Systems mit ZF-Detektion und sequentieller Symbolauslöschung, bei dem im Vergleich zu Abbildung 3.4 ausschließlich die Detektionsreihenfolge verändert wurde. Zu sehen sind die drei Fälle optimale Detektionsreihenfolge, inverse optimale Detektionsreihenfolge und zufällig gewählte Detektionsreihenfolge. Zum Vergleich ist zusätzlich die BER für die parallele Detektion eingezeichnet. Die inverse optimale Detektionsreihenfolge ist die schlechteste Reihenfolge. Die zufällig

⁹Anscheinend deshalb, weil das Symbol wie im idealen Fall nicht vollständig gelöscht wurde, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

gewählte Detektionsreihenfolge bedeutet, dass man die Symbole in einer beliebig sortierten, zum Beispiel aufsteigender Reihenfolge detektiert. Die optimale Detektionsreihenfolge hat gegenüber dem Fall ohne Detektionsreihenfolge hier einen Vorteil von etwa 4 dB und gegenüber der schlechtesten Reihenfolge einen Vorteil von etwa 6 dB. Diese Verbesserungen sind nicht zu vernachlässigen und bestärken die Verwendung der optimalen Detektionsreihenfolge. Darüber hinaus ist in allen drei Fällen die sequentielle Detektion des uncodierten MIMO-Systems leistungsfähiger als die parallele Detektion. In [35] wurde die Detektionsreihenfolge darüber hinaus auch noch in anderen Zusammenhängen behandelt. So wurde dort zum Beispiel die Diversität jedes einzelnen Detektionsschritts untersucht.

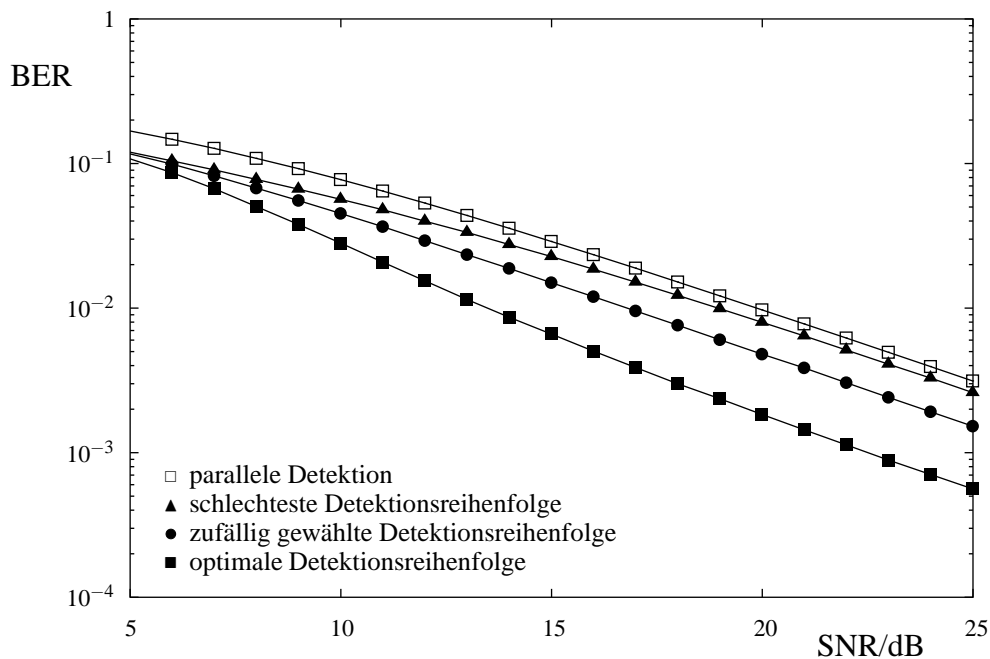


Abbildung 3.5: BER für ZF, QPSK, Gray Mapping, uncodiert, 4×4 , verschiedene Detektionsreihenfolgen

Die optimale Detektionsreihenfolge wurde unter der Voraussetzung (3.62) bestimmt. Daher bleibt abschließend noch zu klären, wie die Verhältnisse sind, wenn für einige j nun $s_{d_j} \neq \hat{s}_{d_j}$ gilt: Eine fehlerhafte Symbolentscheidung wirkt sich auf alle nachfolgenden Symbolentscheidungen aus, und zwar unabhängig von der Detektionsreihenfolge. Für die Störung bei der Detektion des Symbols d_μ gilt nun nach (3.58)

$$\mathbf{n} + \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j (s_j - \hat{s}_j) \quad . \quad (3.66)$$

Auch wenn diese Störung nicht mehr als AWGN angesehen werden kann, so soll ihre Auswirkung dennoch durch eine minimale Norm nach (3.65) minimiert werden. Wie bei ZF üblich, basiert diese Reihenfolge lediglich auf der Kanalmatrix¹⁰. Bei der Festlegung der

¹⁰Bei der MMSE-Detektion wird in Kapitel 3.4.3 auch die Störung durch AWGN und falsche Symbolentscheidungen bei der Berechnung der Detektionsreihenfolge berücksichtigt.

Detektionsreihenfolge weiß man darüber hinaus im Voraus nicht, wie die Detektion bei der gewählten Detektionsreihenfolge tatsächlich verläuft (fehlerfrei/fehlerbehaftet) beziehungsweise weiß man im Voraus nicht, ob eine andere, eventuell suboptimale Detektionsreihenfolge im Einzelfall günstiger wäre¹¹. Im Mittel ist die Festlegung der Detektionsreihenfolge bei ZF über die minimale Norm nach (3.65) optimal.

3.3 MMSE-Entzerrung

In diesem Kapitel wird die MIMO-Detektion anhand der MMSE-Entzerrung eingeführt. In der Grundstruktur der Detektion unterscheidet sie sich nicht wesentlich vom ZF. Jedoch werden sich einige Besonderheiten ergeben, auf die speziell eingegangen wird. Wie bereits im Zusammenhang mit (3.4) bemerkt, war die Detektionsmatrix W beim ZF unabhängig vom Rauschen. Auch die Lösung mit der Pseudoinversen nach (3.32) berücksichtigte das Rauschen bei der Matrixberechnung nicht.

Bei der Entzerrung nach dem minimalen quadratischen Fehler (*minimum mean square(d) error*, MMSE) geht man vom rauschbehafteten System nach (2.20) aus

$$\mathbf{r} = H\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (3.67)$$

und möchte die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix

$$E \left\{ (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})^* \right\} \quad (3.68)$$

minimieren. Für weitere Rechenschritte definiert man mit

$$R_s = \text{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \quad (3.69)$$

und

$$R_n = \text{cov}(\mathbf{n}, \mathbf{n}^*) \quad (3.70)$$

zwei weitere Kovarianzmatrizen. Für den Sendevektor liegt kein a priori Wissen vor, und deshalb wird für R_s mit (2.13)

$$R_s = E_s I_M \quad (3.71)$$

gewählt. Mit (2.16) folgt

$$R_n = 2\sigma_n^2 I_N \quad (3.72)$$

Nach [27] berechnet sich die Detektionsmatrix für (3.67) bei der MMSE-Detektion durch

$$W = R_s H^* (H R_s H^* + R_n)^{-1} \quad (3.73)$$

¹¹Zur *iterativen* Bestimmung von Detektionsreihenfolgen existieren verschiedene Veröffentlichungen [37]. Bei solchen Verfahren wird mit einer beliebigen Detektionsreihenfolge gestartet und der Detektionsprozess nach vollständiger Detektion aller Symbole immer wieder mit einer veränderten, angepassten Detektionsreihenfolge wiederholt.

Mit (3.71) und (3.72) folgt

$$W = E_s I_M H^* \left(H E_s I_M H^* + 2\sigma_n^2 I_N \right)^{-1} . \quad (3.74)$$

Weil es sich bei R_s um eine Skalarmatrix¹² handelt, kann man diese Gleichung zu

$$W = E_s H^* \left(E_s H H^* + 2\sigma_n^2 I_N \right)^{-1} = H^* \left(H H^* + \frac{2\sigma_n^2}{E_s} I_N \right)^{-1} \quad (3.75)$$

vereinfachen. Mit

$$\alpha = \frac{2\sigma_n^2}{E_s} \quad (3.76)$$

ergibt sich schließlich¹³

$$W = H^* \left(H H^* + \alpha I_N \right)^{-1} . \quad (3.77)$$

Eine einzelne Zeile von W ist gegeben durch

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{h}_j^* \left(H H^* + \alpha I_N \right)^{-1} \quad (j = 1, \dots, M) \quad (3.78)$$

Im Prinzip ist damit die Detektionsmatrix für die MMSE-Detektion bestimmt. Die Anwendung des *Matrix-Inversions-Lemmas*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B \left(C^{-1} + DA^{-1}B \right)^{-1} DA^{-1} \quad (3.79)$$

mit $A = \alpha I_N$, $B = H$, $C = I_M$ und $D = H^*$ ergibt (siehe Anhang A.2) die bekannte Formel für die MMSE-Detektionsmatrix:

$$W = \left(H^* H + \alpha I_M \right)^{-1} H^* . \quad (3.80)$$

Der Vorteil von (3.80) gegenüber (3.77) besteht bei MIMO-Systemen mit $M < N$, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden. Vor Anwendung des Matrix-Inversions-Lemmas muss bei der Berechnung der MMSE-Detektionsmatrix nach (3.77) eine $N \times N$ -Matrix invertiert werden. Nach Anwendung des Lemmas genügt in (3.80) die Invertierung einer $M \times M$ -Matrix. Dies führt zu einer Reduzierung des Rechenaufwands etwa um dem Faktor $\left(\frac{N}{M}\right)^3$. Die Gleichungen (3.77) und (3.80) sind also völlig identisch und es spielt – wenn man den Rechenaufwand nicht berücksichtigt – mathematisch keine Rolle, wie die Matrix W berechnet wird.

Mit der so bestimmten Detektionsmatrix ist eine parallele Detektion wie im Falle des ZF möglich. Die am Anfang des Kapitels angesprochene Berücksichtigung des Rauschens bei

¹²Das ist eine Matrix, bei der nur die Diagonalelemente von 0 verschieden sind und alle denselben Wert haben.

¹³Diese einfache Formel gilt unter den Voraussetzungen, dass R_s und R_n jeweils Diagonalmatrizen sind. Wegen dem Interleaver und dem hier verwendeten Mapper ist das erfüllt. Ohne diese Voraussetzungen bleibt (3.73) aber auf jeden Fall gültig. Die vereinfachte Rechnung, die hier und in den folgenden Kapiteln aufgezeigt wird, ist dann allerdings nicht mehr möglich.

der Bestimmung der Detektionsmatrix ist durch den Faktor α erreicht worden. Für $\alpha = 0$ geht die MMSE-Detektionsmatrix in die ZF-Detektionsmatrix über. Dies muss so sein, schließlich bedeutet $\alpha = 0$ nichts anderes als $\sigma_n^2 = 0$, was gleich bedeutend mit einer Nichtberücksichtigung ist. Dieser Sachverhalt des Übergangs von MMSE nach ZF wird auch unmittelbar klar, wenn man (3.31) mit (3.77) beziehungsweise (3.80) vergleicht. Weil ZF einen suboptimalen Sonderfall von MMSE darstellt (nämlich die Nichtberücksichtigung von α) und darin enthalten ist, wird im Folgenden zumeist nur noch der MMSE-Empfänger betrachtet. Mit $\alpha = 0$ lassen sich sämtliche Ergebnisse auf ZF übertragen.

3.3.1 Intrasympolvektorinterferenz bei der MMSE-Detektion

Bei der ZF-Detektion hing der Schätzwert für ein Symbol nur vom gesendeten Symbol sowie von einem detektionsgefilterten Rauschen ab (siehe (3.12)). Bei der Detektion mit MMSE ist das Matrixprodukt aus Detektionsmatrix und Kanalmatrix

$$WH \tag{3.81}$$

im Allgemeinen keine Diagonalmatrix mehr. Im Gegensatz zu (3.6) gilt also zunächst im rauschfreien Fall

$$\mathbf{y} = W\mathbf{r} = (H^*H + \alpha I_M)^{-1} H^* \mathbf{r} = \underbrace{(H^*H + \alpha I_M)^{-1} H^* H}_{\text{i. a. } \neq I_M} \mathbf{s} \neq I_M \mathbf{s} = \mathbf{s} \quad . \tag{3.82}$$

Weil es sich nicht mehr um eine Diagonalmatrix handelt, treten jetzt Störungen innerhalb von \mathbf{y} auf: Jedes Element s_j ($j = 1, \dots, M$) aus \mathbf{s} beeinflusst alle Komponenten von \mathbf{y} . Das war eigentlich bei einem MIMO-Übertragungskanal auch zu erwarten. Diese Störung wird deshalb als *Intrasympolvektorinterferenz* bezeichnet und mit ISVI abgekürzt. Es darf nicht mit der *Intersymbolinterferenz* (ISI) oder der *Interkanalinterferenz* (*inter channel interference*, ICI) verwechselt werden, bei der sich zeitlich aufeinander folgende Symbole oder Symbole benachbarter Trägerfrequenzen, gegenseitig beeinflussen. ISI ist bei dem Kanalmodell, das dieser Arbeit zu Grunde liegt, ausgeschlossen, und ICI tritt wegen der Einträgerbetrachtung auch nicht auf. ISVI stellt die räumliche Interferenz dar.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, das Matrixprodukt WH zu einer quadratischen Matrix

$$\tilde{H} = WH = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \cdots & \tilde{h}_{1M} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \cdots & \tilde{h}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{M1} & \tilde{h}_{M2} & \cdots & \tilde{h}_{MM} \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

mit M Zeilen und M Spalten zusammenzufassen. Wie schon mehrfach erwähnt, ist dies im Falle des ZF eine Einheitsmatrix. Aus (3.5) und (3.83) folgt unter Berücksichtigung des Rauschens

$$\mathbf{y} = \tilde{H}\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}} \quad . \tag{3.84}$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine Erweiterung von (3.35). Bezeichnet man die j -te Zeile von \tilde{H} mit

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = \mathbf{w}_j H \quad (j = 1, \dots, M) \quad , \quad (3.85)$$

so ergibt sich komponentenweise

$$y_j = \tilde{\mathbf{h}}_j \mathbf{s} + \tilde{n}_j = \sum_{l=1}^M \tilde{h}_{jl} s_l + \tilde{n}_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.86)$$

Das ist die verallgemeinerte Erweiterung von (3.36). Bei \tilde{h}_{jl} handelt es sich um das Element der Matrix $\tilde{H} = WH$, das in der j -ten Zeile und l -ten Spalte steht. Insbesondere ist \tilde{h}_{jj} das j -te Diagonalelement von \tilde{H} . Bevor (3.86) genauer untersucht wird, sehen wir uns nochmals (3.83) an: Die Matrix W kann als linearer Transformator für Matrix H angesehen werden. Das heißt, H wird durch W während der Detektion in \tilde{H} transformiert. Die Matrix \tilde{H} stellt daher sozusagen einen *detektionstransformierten* MIMO-Übertragungskanal dar. In [38] habe ich \tilde{H} als *post detection channel* bezeichnet (Post-Detektions-Kanal), da er nach der Detektion faktisch auftritt. In der Tat sind die beiden Gleichungen (3.84) und (2.20) augenscheinlich ähnlich und stellen die Verhältnisse des MIMO-Systems vor und nach der Detektion dar.

Gleichung (3.86) lässt sich anders schreiben, wenn man den gewünschten Signalanteil aus der Summe herauszieht:

$$y_j = \tilde{h}_{jj} s_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \tilde{h}_{jl} s_l + \tilde{n}_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.87)$$

Ein Vergleich mit (3.36) zeigt, dass im Falle der MMSE-Detektion mit

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \tilde{h}_{jl} s_l \quad (j = 1, \dots, M) \quad (3.88)$$

im Vergleich zu ZF ein zusätzlicher Störterm hinzugekommen ist. Das mag auf den ersten Blick verwundern, weil die MMSE-Detektion doch mit dem Ziel eingeführt wurde, den mittleren quadratischen Fehler zu minimieren und die BER zu senken. Wie die Simulationsergebnisse später noch zeigen werden, ist dies in der Tat auch so. Zwar tritt ein zusätzlicher Störterm auf. Dieser wird aber durch ein viel geringeres detektionsgefiltertes Rauschen mehr als ausgeglichen. Nach (3.87) tritt s_j in y_j zusammen mit dem Faktor \tilde{h}_{jj} auf. Dies ist jedoch lediglich eine Änderung der Amplitude und keine Phasendrehung, da \tilde{h}_{jj} reell ist (siehe Anhang A.3).

3.3.2 Die Varianz der Intrasymbolvektorinterferenz

Will man das Symbol j detektieren, sind nach (3.87) alle anderen Symbole $l = 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, M$ als störende Interferenz innerhalb des Symbolvektors anzusehen. Die Varianzen dieser Interferenzterme können addiert werden. Es ergibt sich unter Berücksichtigung

der Tatsache, dass sämtliche \tilde{h}_{jl} im Empfänger als diskrete Realisierungen bekannt sind

$$\sigma_{\text{ISVI},j}^2 = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \text{var} \{ \tilde{h}_{jl} s_l \} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \text{var} \{ s_l \} |\tilde{h}_{jl}|^2 \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.89)$$

Dabei ist die Varianz $\text{var} \{ x \}$ als

$$\text{var} \{ x \} = E \{ |x|^2 \} - |E \{ x \}|^2 \quad (3.90)$$

definiert. Da die s_l nicht von den \tilde{h}_{jl} abhängen und zusätzlich $E \{ s_l \} = 0$ angenommen wird, ergibt sich schließlich

$$\sigma_{\text{ISVI},j}^2 = E_s \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M |\tilde{h}_{jl}|^2 \quad (j = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.91)$$

Die MMSE-Detektion wird also durch das detektionsgefilterte Rauschen ebenso gestört wie durch die Intrasymbolvektorinterferenz. Die Varianzen beider Störungen lassen sich addieren

$$\sigma_{\text{AWGN},j}^2 + \sigma_{\text{ISVI},j}^2 \quad (j = 1, \dots, M) \quad (3.92)$$

und werden im Demapper als resultierende Varianz berücksichtigt.

Abbildung 3.6 stellt die parallele ZF-Detektion der parallelen MMSE-Detektion gegenüber. Wie zu erwarten, zeigt die MMSE-Detektion in allen Fällen und über den gesamten SNR-Bereich eine niedrigere BER als ZF. Der tatsächliche Vorteil gemessen in dB der MMSE-

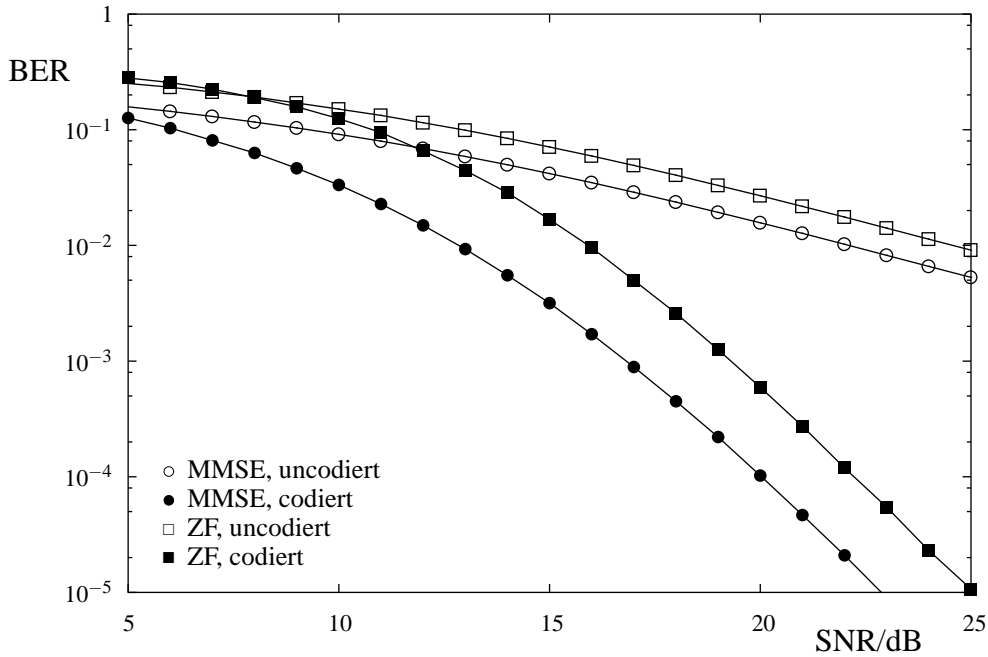


Abbildung 3.6: BER für ZF und MMSE, 16-QAM, Gray Mapping, codiert und uncodiert, 6×6 , parallele Detektion

gegenüber der ZF-Detektion hängt sowohl im codierten als auch im uncodierten Fall natürlich von sämtlichen Systemparametern ab. In jedem Fall bleibt jedoch der Vorteil der MMSE-Detektion gegenüber der ZF-Detektion im Bereich brauchbarer SNR bestehen.

3.4 MMSE-Entzerrung mit Anwendung der sequentiellen Symbolauslöschung

Analog zur Vorgehensweise bei ZF in Kapitel 3.2 kann man auch bei der MMSE-Detektion eine sequentielle Symbolauslöschung durchführen. Wie bei ZF spielt auch hier die Reihenfolge der Symbolauslöschung eine wichtige Rolle. Gemäß (3.64) wurde die Reihenfolge bei ZF nach absteigendem Post-Detektions-SNR durchgeführt. Ein ähnliches Kriterium für die Detektionsreihenfolge ist auch bei MMSE möglich. Allerdings muss man die Intrasymbolvektorinterferenz aus Kapitel 3.3.1 im Gegensatz zu ZF in diesem Fall als zusätzliche Störung berücksichtigen.

Bevor es an die optimale MMSE-Detektionsreihenfolge geht, betrachten wir zunächst zusätzlich die durch falsche Symbolauslöschung hervorgerufene Störung.

3.4.1 Berücksichtigung der durch falsche Symbolauslöschung (SAL) hervorgerufenen Störung

In Kapitel 3.2 wurde bei der sequentiellen Symbolauslöschung mit (3.44) vorausgesetzt, dass das detektierte Symbol richtig geschätzt wurde. Diese Voraussetzung stellt in realen Systemen selbstverständlich nur eine Näherung dar. Im Folgenden werden die Auswirkungen untersucht, die entstehen, wenn der Schätzwert nicht mit dem tatsächlich gesendeten Symbol übereinstimmt, wenn also für einige oder alle $j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$ die Gleichung

$$s_j \neq \hat{s}_j \quad (3.93)$$

zutrifft. Nach dem ersten Detektionsschritt ($\mu = 1$) bleibt bei falscher Subtraktion nach (3.43)

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \mathbf{h}_{d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \quad (3.94)$$

übrig. Für den zweiten Detektionsschritt ergibt sich unter entsprechender Anwendung von (3.40) und (3.83)

$$\begin{aligned} y_{d_2} &= \mathbf{w}_{d_2} \tilde{\mathbf{r}}_{d_2} \\ &= \mathbf{w}_{d_2} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \mathbf{h}_{d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \mathbf{w}_{d_2} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{w}_{d_2} \mathbf{n} + \mathbf{w}_{d_2} \mathbf{h}_{d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d_1}}^M \tilde{h}_{d_2 j} s_j + \tilde{n}_{d_2} + \tilde{h}_{d_2 d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \\
&= \tilde{h}_{d_2 d_2} s_{d_2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \{d_1, d_2\}}}^M \tilde{h}_{d_2 j} s_j + \tilde{n}_{d_2} + \tilde{h}_{d_2 d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \quad . \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Bei der ZF-Detektion war im Falle der sequentiellen Symbolauslöschung die Berechnung der Detektionsmatrix elegant unter Ausnutzung der Nullvektor-Eigenschaft der Pseudoinversen möglich. Bei der MMSE-Detektion gibt es ebenfalls eine Möglichkeit, die Berechnung effizient durchzuführen. Sie wird in Kapitel 3.5.5 vorgestellt.

Die Detektion in (3.96) wird durch den Term

$$\tilde{h}_{d_2 d_1} (s_{d_1} - \hat{s}_{d_1}) \quad (3.97)$$

zusätzlich gestört. Unter Anwendung der eingeführten Indexmengen ergibt sich allgemein für den μ -ten Detektionsschritt

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.98)$$

und

$$y_{d_\mu} = \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} s_{d_\mu} + \sum_{j \in \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}} \tilde{h}_{d_\mu j} s_j + \tilde{n}_{d_\mu} + \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.99)$$

Diese Gleichungen beschreiben die Verhältnisse nach der Detektion umfassend und wurden erstmalig in [39] hergeleitet. y_{d_μ} setzt sich aus 4 Teilen zusammen. Als erstes ist das gesuchte Symbol s_{d_μ} enthalten, das mit dem reellen Koeffizienten $\tilde{h}_{d_\mu d_\mu}$ des Post-Detektions-Kanals gewichtet ist. Der zweite Term beschreibt die ISVI, die sich aus allen noch nicht detektierten Symbolen zusammensetzt, die ebenfalls mit ihrem jeweiligen komplexwertigen Post-Detektions-Kanalkoeffizienten gewichtet sind. Als drittes kommt das detektionsgefilterte Rauschen hinzu. Der komplexwertige Störterm

$$\sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.100)$$

wird durch eine falsche Symbolauslöschung (SAL) verursacht und verschwindet für diejenigen Symbole, die richtig detektiert wurden. Im Idealfall trifft dies auf alle Symbole s_j ($j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$) zu. Dies wird aber umso unwahrscheinlicher, je mehr Symbole sequentiell detektiert werden, also je mehr Sendeantennen im MIMO-System existieren. Je nach Phasenlage und Amplitude des Störterms kommt es in Verbindung mit dem detektionsgefilterten

Rauschen und der Intrasymbolvektorinterferenz bei der Detektion zu einer Fehlerfortpflanzung aus vorangegangenen Symbolfehlentscheidungen. Die Größe der Störung nachfolgender Symbolentscheidungen lässt sich durch die Varianz der SAL-Störung beschreiben.

3.4.2 Die Varianz der SAL-Störung

Die Berechnung der Varianz der SAL-Störung ist nicht direkt möglich, weil der Empfänger ohne a priori Wissen keine Kenntnisse über s_j besitzt. Ihm sind lediglich die in vorangegangenen Detektionsschritten gewonnenen Schätzwerte \hat{s}_j und deren Softwerte y_j ($j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$) bekannt. Aus diesem Grund ist es notwendig, die Varianz über bedingte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Diese etwas längere Rechnung ist in Anhang A.5 durchgeführt. Das Ergebnis ist

$$\sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 = \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j \mid y_j \right\} \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad . \quad (3.101)$$

Die Berechnung der Varianzen $\text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j \mid y_j \right\}$ kann ebenfalls dem Anhang entnommen werden. Wichtig ist an dieser Stelle die Bemerkung, dass $\text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j \mid y_j \right\}$ und damit $\sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2$ umso kleiner wird, je weiter man bei der Quantisierung \hat{s}_j von der nächstliegenden Entscheidungsschwelle entfernt ist.

Im Kapitel 3.3.2 wurde hergeleitet, dass die MMSE-Detektion durch das detektionsgefilterte Rauschen ebenso gestört wird wie durch die Intrasymbolvektorinterferenz. Nun kommt mit der fehlerhaften Symbolauslöschung ein dritter Störer hinzu. Die Varianzen aller Störungen ergeben für den μ -ten Detektionsschritt

$$\tilde{\sigma}_{d_\mu}^2 = \sigma_{\text{AWGN}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad , \quad (3.102)$$

wenn man näherungsweise Unkorreliertheit der Störterme voraussetzt. Die optimale Detektionsreihenfolge, die im nächsten Kapitel betrachtet wird, hängt von diesen Varianzen ab.

Es bleibt die berechtigte Frage, warum überhaupt sequentielle Symbolauslöschung durchgeführt wird, wenn man sich dadurch eine weitere Unsicherheit in Form von möglicherweise falscher Symbolauslöschung und der damit verbundenen Fehlerfortpflanzung aufbürdet. In Kapitel 3.2 wurde angeführt, dass bei richtiger Symbolauslöschung die Diversität um 1 steigt und somit die BER sinkt. Im optimalen Fall entspricht dies dem so genannten Genie-Detektor [35]. Dies ist die Chance, die man bei Anwendung der sequentiellen Symbolauslöschung ausnutzen kann. Diesem Umstand tritt der negative Effekt der Fehlerfortpflanzung bei falscher Symbolauslöschung entgegen. Insgesamt überwiegen jedoch die Vorteile, so dass die BER unter Anwendung der sequentiellen Symbolauslöschung in einem weiten SNR-Bereich sinkt.

Bevor nun Simulationsergebnisse unter Berücksichtigung der Varianz der SAL-Störung gezeigt werden, muss wie bei der ZF-Detektion noch die optimale Detektionsreihenfolge behandelt werden.

3.4.3 Die optimale Detektionsreihenfolge bei der MMSE-Detektion

Wie bei der ZF-Detektion mit sequentieller Symbolauslöschung in Kapitel 3.2 und darin insbesondere Kapitel 3.2.3 spielt die Detektionsreihenfolge eine erhebliche Rolle und hat großen Einfluss auf die BER. Die optimale Detektionsreihenfolge wurde im Anhang A.4 in allgemeiner Form schon im Zusammenhang mit der ZF-Detektion berechnet. Das Ergebnis lautet wie folgt:

Für den μ -ten Detektionsschritt ($\mu = 1, \dots, M$) sucht man dasjenige Symbol s_{d_μ} ($d_\mu \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}$), für das

$$\varepsilon_{d_\mu} = E_s \left(1 - \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} \right)^2 + \sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{AWGN}, d_\mu}^2 \quad (3.103)$$

minimal wird. Dabei ist

$$\sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 \stackrel{(A.39)}{=} \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j \mid y_j \right\}, \quad (3.104)$$

$$\sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 \stackrel{(3.91)}{=} E_s \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \quad (3.105)$$

und

$$\sigma_{\text{AWGN}, d_\mu}^2 \stackrel{(3.38)}{=} 2\sigma_n^2 \cdot \sum_{i=1}^N \left| w_{d_\mu i} \right|^2 = 2\sigma_n^2 \cdot \left\| \mathbf{w}_{d_\mu} \right\|^2. \quad (3.106)$$

In Abbildung 3.7 sind für ZF und MMSE jeweils drei verschiedenen Empfängerstrukturen simuliert: Die parallele Detektion, die sequentielle Detektion ohne Berücksichtigung der Varianz der durch SAL hervorgerufenen Störung und die sequentielle Detektion mit deren Berücksichtigung beim Demapper.

Die parallele Detektion und die sequentielle Detektion ohne Berücksichtigung der Varianz der SAL-Störung sind aus vorangegangenen Simulationen bekannt. Berücksichtigt man nun die Varianz der SAL-Störung, erhält man in weiten SNR-Bereichen die geringste BER. Allerdings zeigt sich, dass die BER-Kurve bei der Berücksichtigung der SAL-Störung bei höherem SNR dieselbe Steigung besitzt wie ohne deren Berücksichtigung. Weil die BER der parallelen Detektion steiler abfällt, wird für sehr hohe SNR (und damit für sehr kleine BER) die parallele Detektion trotz der Berücksichtigung der durch SAL hervorgerufenen Störung die niedrigste BER aufweisen. Für ZF ist dieser Schnittpunkt bei 23 dB gerade noch zu sehen. Bei MMSE wird er etwa bei 20 dB auftreten. Der Grund liegt hier in dem im Anhang A.5.1 angesprochenen inhärenten Problem. Mit der Berücksichtigung der Varianz der SAL-Störung beim Demapper stößt man bei großem SNR daher an die Grenze des Machbaren. Dennoch hat die sequentielle Detektion ihre Berechtigung, wenn sie in Systemen verwendet wird, bei denen eine zusätzliche äußere Codierung eingesetzt wird. Zwischen etwa 9 und 15 dB SNR hat die sequentielle Detektion mit Berücksichtigung der Varianz der SAL-Störung gegenüber der parallelen Detektion sichtbare Vorteile von etwa 2 bis 3 dB.

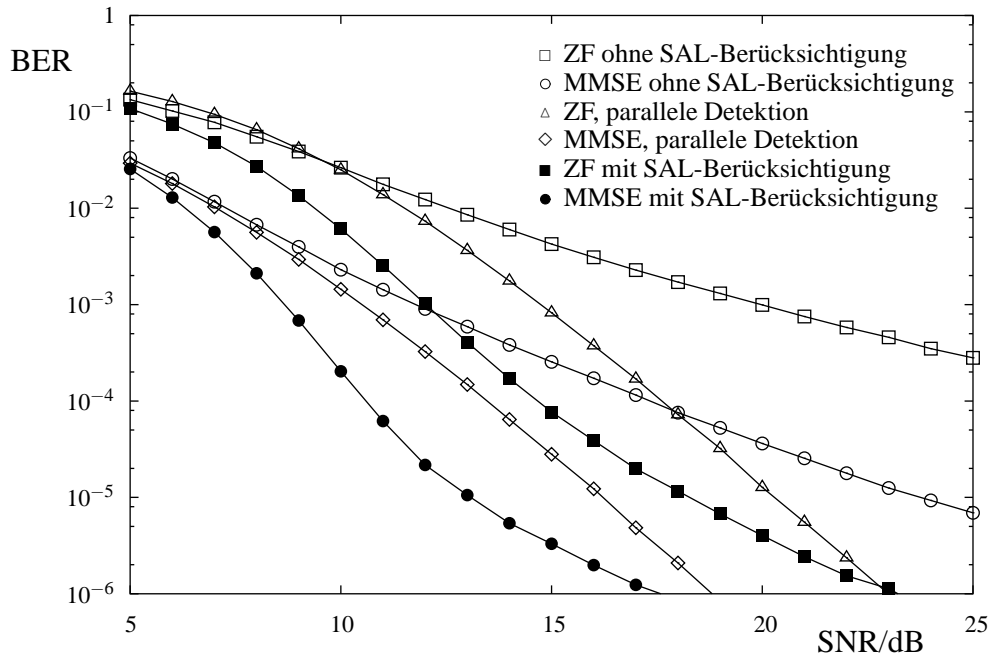


Abbildung 3.7: BER für ZF und MMSE, QPSK, Gray Mapping, codiert, 4×4 , parallele Detektion sowie sequentielle SAL mit und ohne Berücksichtigung der Varianz der durch SAL hervorgerufenen Störung beim Demapper

3.5 Schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung

Mit der sequentiellen Symbolauslöschung unter Berücksichtigung der Varianz des dabei begangenen Fehlers lässt sich die BER reduzieren. In Anhang A.5.1 wurde aber auch dargelegt, dass die Varianzberechnung bei fehlendem a priori Wissen nicht optimal ist. Deshalb führt ein falsch geschätztes Symbol letztendlich immer zu einer (wenn auch abgeschwächten) Fehlerfortpflanzung bei der Detektion nachfolgender Symbole und damit zu einer höheren BER. Zusätzlich wird die Varianz σ_{SAL, d_μ}^2 auch dann berechnet und beim nachfolgenden MAP-Demapping berücksichtigt, wenn das Symbol korrekt detektiert und subtrahiert wurde, obwohl es in diesem Fall gar nicht notwendig wäre. Bei korrekter Detektion rechnet man also mit σ_{SAL, d_μ}^2 zu pessimistisch.

Wünschenswert wäre es, im Voraus¹⁴ ein Maß für die zu erwartende Qualität der Symbolauslöschung zu besitzen und etwa wie folgt vorzugehen:

- Wenn die Symbolauslöschung voraussichtlich korrekt ist, dann wird die Symbolauslöschung auch durchgeführt, um von der Diversitätserhöhung in weiteren Detektionsschritten zu profitieren.

¹⁴Also noch bevor die Symbolauslöschung tatsächlich durchgeführt wird.

- Wenn die Symbolauslöschung voraussichtlich nicht korrekt ist, dann wird auf die Symbolauslöschung lieber verzichtet, um die negativen Folgen einer Fehlerfortpflanzung zu vermeiden.

Im Rahmen der Untersuchung der Fehlerfortpflanzung und deren Folgen wurden in den beiden Arbeiten [40] und [41] wichtige Erkenntnisse herausgearbeitet. Daraus entstand im weiteren Verlauf die genannte schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung (*threshold-based cancellation*) [39], die in den folgenden Unterkapiteln behandelt wird. Das Blockschaltbild ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Dabei gilt wieder, dass die verwendeten Bezeichnungen im Folgenden erklärt werden.

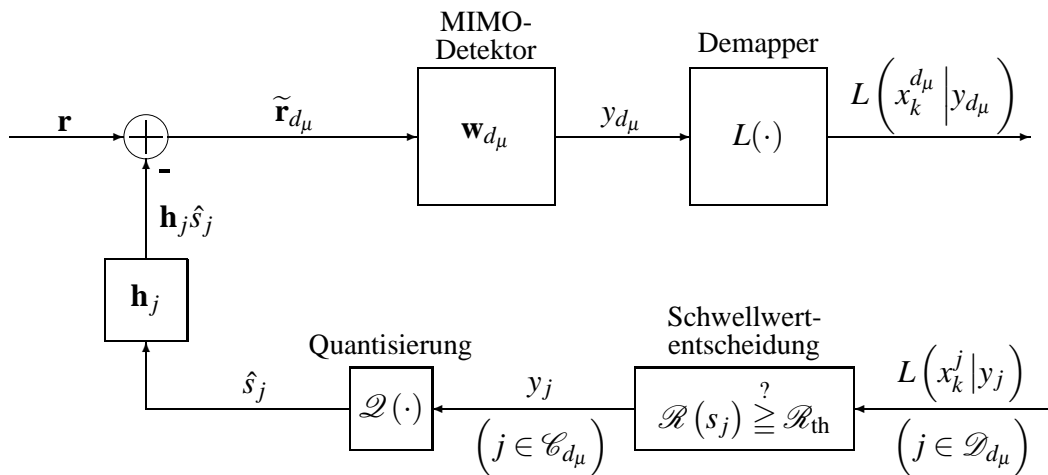


Abbildung 3.8: Aufbau eines MIMO-Detektors mit schwellwertentscheidungs-basierter Symbolauslöschung und anschließendem Demapping

3.5.1 Die Qualität der Symbolauslöschung

Wir suchen ein Maß für die Qualität der Symbolauslöschung, also ein Kriterium, um eine Aussage darüber machen zu können, wie sinnvoll eine Symbolauslöschung ist. Vorzugsweise soll dieses Maß schon vorliegen, bevor die Symbolauslöschung tatsächlich durchgeführt wird.

Der Empfänger hat keine Informationen über die tatsächlich gesendeten Symbole. Stattdessen liegen nach dem μ -ten Detektionsschritt die Softsymbole y_{d_j} und deren Quantisierungen \hat{s}_{d_j} ($j = 1, \dots, \mu$) vor. Da der äußere Codierer auf Bitebene mit L -Werten arbeitet, ist eine Konvertierung, nämlich das Demapping, von Symbolen auf L -Werte nach (2.26) erforderlich. Praktisch ist das Demapping unmittelbar nach der Detektion von y_{d_j} möglich. Damit liegen auf der Empfängerseite neben den Softsymbolen und deren Quantisierungen auch die L -Werte der diesen Symbolen zu Grunde liegenden Bits vor.

L -Werte beinhalten zwei verschiedene Informationen. Ihr Vorzeichen gibt an, ob es sich bei einer (harten) Entweder-Oder-Entscheidung bei diesem Bit um eine 0 oder um eine 1 handelt.

Bei der Definition nach (2.28) bedeutet ein positiver L -Wert, dass eine 1 wahrscheinlicher ist, und ein negativer L -Wert besagt, dass eine 0 wahrscheinlicher ist. Der Betrag des L -Werts gibt darüber hinaus Auskunft über die Zuverlässigkeit (*reliability*) der Entscheidung für eine 0 oder 1. Je größer der Betrag, desto Zuverlässiger ist die Entscheidung.

Die Zuverlässigkeitsinformation eines Symbols wird nun mit $\mathcal{R}(s_j)$ bezeichnet. Da die Symbole aus Q Bits bestehen und durch das verwendete Mapping mit diesen verbunden sind, ist es möglich, aus den Zuverlässigkeitsinformationen der Bits eine Zuverlässigkeitsinformation für das Symbol zu ermitteln. Es sind eine ganze Reihe solcher Berechnungen denkbar. Unter der Annahme, dass kein Bit eine herausragende Stellung einnimmt, bieten sich beispielsweise folgende Möglichkeiten an:

Die Summe der Beträge der L -Werte

$$\mathcal{R}(s_j) = \sum_{k=0}^{Q-1} \left| L(x_k^j | y_j) \right| , \quad (3.107)$$

der Mittelwert der Beträge der L -Werte

$$\mathcal{R}(s_j) = \frac{1}{Q} \sum_{k=0}^{Q-1} \left| L(x_k^j | y_j) \right| , \quad (3.108)$$

oder der kleinste Betrag aller L -Werte

$$\mathcal{R}(s_j) = \min_{k=0, \dots, Q-1} \left\{ \left| L(x_k^j | y_j) \right| \right\} . \quad (3.109)$$

Daneben sind noch weitere Möglichkeiten denkbar. Die genannten drei Verfahren wurden in [41] hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit bezüglich der BER untersucht. Es stellte sich heraus, dass die dritte Methode den größten Erfolg bietet. Dies hat einen plausiblen, sofort einleuchtenden Grund. Ein Symbol kann nur dann als sicher erkannt werden, wenn *alle* zu Grunde liegenden Bits als sicher gelten. Es genügt die Unsicherheit in nur einem Bit, um das gesamte Symbol unsicher werden zu lassen. Symbole, die allerdings nicht mit großer Sicherheit als richtig detektiert werden, bringen die Gefahr mit sich, dass deren Subtraktion nachteilig ist und damit eine Fehlerfortpflanzung induziert wird. Es ist also durchaus sinnvoll, sich nach dem schwächsten Glied in der Kette zu orientieren. Und das ist das Bit mit dem betragsmäßig kleinsten L -Wert. Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein Symbol aus 4 Bit besteht, und deren L -Werte seien $L_0 = 10$, $L_1 = -0,5$, $L_2 = 10$ und $L_3 = -10$. Das heißt, drei Bits sind sehr sicher erkannt¹⁵ und das Bit mit dem L -Wert $L_1 = -0,5$ ist relativ unsicher¹⁶. Die Anwendung von (3.108) führt auf einen mittleren L -Wert-Betrag von 7,625, was

¹⁵Unter Anwendung von (A.36) führt ein L -Wert von 10 auf eine Wahrscheinlichkeit von etwa 99,995 %, dass das Bit eine 1 war.

¹⁶Ein L -Wert von $-0,5$ führt auf eine Wahrscheinlichkeit von etwa 62 %, dass das Bit eine 0 war, was gleichzeitig bedeutet, dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 38 % auch eine 1 sein könnte.

immer noch einer Entscheidungssicherheit von etwa 99,95 % entspricht. Erst bei Anwendung von (3.109) orientiert sich die Entscheidungssicherheit des gesamten Symbols an der Zuverlässigkeitsinformation des *unzuverlässigsten* Bits.

Damit ist das Zwischenziel erreicht, bereits vor der Detektion mit $\mathcal{R}(s_j)$ nach (3.109) ein Maß für die Zuverlässigkeit eines detektierten Symbols und damit auch für die Zuverlässigkeit einer korrekten Symbolauslöschung zu erhalten. Da die L -Werte nach dem Demapping sowieso vorliegen, beschränkt sich der Mehraufwand bisher lediglich auf die Bestimmung des kleinsten Betrags. Dies ist in der Praxis vernachlässigbar.

3.5.2 Die Schwellwertentscheidung

Mit Kenntnis von $\mathcal{R}(s_j)$ muss in einem zweiten Schritt nun entschieden werden, ob mit dem gerade detektierten Symbol \hat{s}_j nun eine Symbolauslöschung durchgeführt wird, um von der möglichen Diversitätserhöhung zu profitieren. Dazu vergleicht man den berechneten Wert $\mathcal{R}(s_j)$ mit einem Schwellwert \mathcal{R}_{th} und wendet die folgende Regel an:

- Die Subtraktion/Symbolauslöschung wird durchgeführt, wenn $\mathcal{R}(s_j) \geq \mathcal{R}_{\text{th}}$, wenn also die Zuverlässigkeit der Symboldetektion groß genug ist.
- Die Subtraktion/Symbolauslöschung wird *nicht* durchgeführt, wenn $\mathcal{R}(s_j) < \mathcal{R}_{\text{th}}$, wenn also die Zuverlässigkeit der Symboldetektion zu gering ist.

Durch die Wahl des Schwellwertes \mathcal{R}_{th} lässt sich das Verhalten des Detektors beeinflussen. Ein hoher Schwellwert bedeutet ein eher konservatives Verhalten bezüglich der Symbolauslöschung, weil kaum Symbolsubtraktionen durchgeführt werden. Dies hat den Vorteil, dass die Wahrscheinlichkeit einer falschen Symbolauslöschung und damit einer Fehlerfortpflanzung sehr gering ist. Ein geringer Schwellwert stellt dagegen eine progressive Vorgehensweise dar, weil auch Symbole gelöscht werden, die nicht ganz sicher sind. Dies hat den Vorteil, bei korrekter Symbolentscheidung von der Diversitätserhöhung zu profitieren, birgt allerdings auch das Risiko der Fehlerfortpflanzung.

Im Übrigen ist $\mathcal{R}_{\text{th}} = 0$ identisch mit dem Fall der sequentiellen Symbolauslöschung, weil jedes $\mathcal{R}(s_j)$ gleich oder größer als dieser Schwellwert ist. Und für $\mathcal{R}_{\text{th}} \rightarrow \infty$ erhält man den einfachen Fall der parallelen Symboldetektion. Mit der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung begibt man sich daher auf einen Mittelweg, der die BER reduziert.

3.5.3 Erweiterung der Indexmengen

In Kapitel 3.2.2 wurden für den μ -ten Detektionsschritt ($\mu = 1, \dots, M$) die Indexmengen \mathcal{D}_{d_μ} (das sind die Symbole, die bereits detektiert wurden) und $\overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}$ (die noch nicht detektiert wurden) eingeführt. Bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung müssen diese beiden Mengen um eine weitere Menge erweitert werden.

Genau genommen muss die Menge der detektierten Symbole \mathcal{D}_{d_μ} aufgeteilt werden. Bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung gibt es nämlich nun Symbole, die zwar detektiert wurden, aber auf Grund der Schwellwertentscheidung nicht subtrahiert werden. Daneben gibt es weiterhin Symbole, die sowohl detektiert als auch subtrahiert wurden. Es wird nun die Aufteilung

$$\mathcal{D}_{d_\mu} = \mathcal{D}'_{d_\mu} \cup \mathcal{D}''_{d_\mu} \quad (3.110)$$

vorgenommen, wobei die Menge \mathcal{D}'_{d_μ} diejenigen Symbole enthält, die sowohl detektiert als auch subtrahiert wurden und die Menge \mathcal{D}''_{d_μ} enthält diejenigen Symbole, die zwar bereits detektiert, aber wegen eines zu kleinen Wertes von $\mathcal{R}(s_j)$ nicht subtrahiert worden sind. Es gilt nun also (vergleiche mit (3.55))

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}'_{d_\mu} \cup \mathcal{D}''_{d_\mu} \cup \{d_\mu\} \cup \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}} \quad (3.111)$$

An dieser Stelle ist es von großem Vorteil, noch zwei weitere Indexmengen einzuführen, die auf den gerade genannten aufbauen:

$$\mathcal{C}_{d_\mu} = \mathcal{D}'_{d_\mu} \quad (3.112)$$

und

$$\overline{\mathcal{C}_{d_\mu}} = \mathcal{D}''_{d_\mu} \cup \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}} \quad (3.113)$$

so dass

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_{d_\mu} \cup \{d_\mu\} \cup \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}} \quad (3.114)$$

gilt. Damit bleiben *sämtliche* Gleichungen, die für die sequentielle Symbolauslöschung hergeleitet wurden, auch im Fall der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung gültig, wenn man überall

$$\mathcal{D}_{d_\mu} \text{ durch } \mathcal{C}_{d_\mu} \quad (3.115)$$

und

$$\overline{\mathcal{D}_{d_\mu}} \text{ durch } \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}} \quad (3.116)$$

ersetzt. Insbesondere die Suche nach der optimalen Detektionsreihenfolge bleibt unbeeinflusst.

Mit dieser Notation ist in Abbildung 3.8 ersichtlich, dass nur diejenigen Symbole der Subtraktion zugeführt werden, deren Indices in \mathcal{C}_{d_μ} enthalten sind. In Analogie zu (3.98) und (3.99) ergibt sich mit diesen Indexmengen nun

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \sum_{j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}} \mathbf{h}_j s_j + \mathbf{n} + \sum_{j \in \mathcal{C}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.117)$$

und

$$y_{d_\mu} = \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} s_{d_\mu} + \sum_{j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}} \tilde{h}_{d_\mu j} s_j + \tilde{n}_{d_\mu} + \sum_{j \in \mathcal{C}_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.118)$$

3.5.4 Die optimale Entscheidungsschwelle

In [42] und vor allem in [43] wurde die Entscheidungsschwelle \mathcal{R}_{th} intensiv untersucht. Es stellte sich heraus, dass für eine breite Vielfalt an unterschiedlichen MIMO-Systemen die optimale Entscheidungsschwelle $\mathcal{R}_{\text{th,opt}}$ im interessierenden SNR-Bereich meistens zwischen $\mathcal{R}_{\text{th}} = 0,8$ und $\mathcal{R}_{\text{th}} = 1,2$ liegt und darüber hinaus innerhalb dieses SNR-Bereichs kaum vom SNR abhängt. Im Bereich $0,8 < \mathcal{R}_{\text{th}} < 1,2$ ist die minimale BER praktisch nicht von der gewählten Schwelle abhängig. Im Rahmen der Simulationsgenauigkeit lässt sich die optimale Entscheidungsschwelle daher nur näherungsweise bestimmen (siehe zum Beispiel Abbildung 3.9). Man erkennt, dass ein ausgeprägtes Maximum nicht vorhanden ist. Vielmehr ist der Bereich $0,8 < \mathcal{R}_{\text{th}} < 1,2$ etwa gleichermaßen von Vorteil. Darüber hinaus ist die gezeichnete Kurve für $\mathcal{R}_{\text{th}} \rightarrow \infty$ monoton fallend, das heißt, es existiert kein weiteres (lokales) Maximum. Aus diesem Grund erhält man mit der sequentiellen Symbolauslöschung bei der Wahl einer Entscheidungsschwelle im angesprochenen Bereich stets eine geringere BER als bei der parallelen Detektion ($\mathcal{R}_{\text{th}} \rightarrow \infty$) und bei der sequentiellen Detektion ($\mathcal{R}_{\text{th}} = 0$).

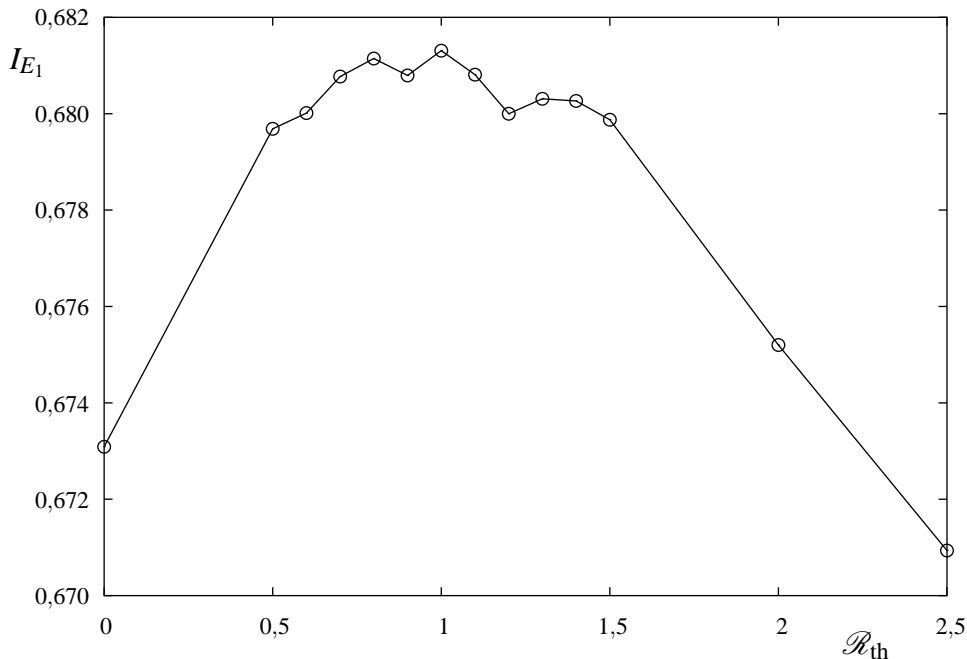


Abbildung 3.9: Extrinsische Information I_{E_1} von E_1 (siehe Abbildung 2.3) für $M = N = 5$, QPSK, Anti-Gray Mapping, $I_{A_1} = 0$, SNR = 7 dB bei unterschiedlichen Schwellwerten

Des Weiteren ist die Genauigkeit der Entscheidungsschwelle mit zunehmender Anzahl an bereits detektierten Symbolen innerhalb des Symbolvektors immer weniger wichtig. Das liegt an der Tatsache, dass die mögliche Fehlerfortpflanzung mit immer weniger zur Detektion verbleibenden Symbolen ebenfalls immer weiter abnimmt. Aus diesem Grund ist es einerseits besonders wichtig, gerade in den ersten Detektionsschritten einen guten Schwellwert zu verwenden. Andererseits wird dies im weiteren Detektionsverlauf immer unwichtiger.

Eine direkte analytische Bestimmung von $\mathcal{R}_{\text{th, opt}}$ ist nicht möglich. Eine Möglichkeit ist aber, für einige typische Systeme die optimale Schwelle durch exzessive BER-Simulationen empirisch zu ermitteln und in Tabellen (*look-up tables*) abzulegen. Beim Betrieb kann man die Schwelle entsprechend der festgelegten Werte wählen.

Tabelle 3.1 zeigt beispielhaft die optimalen Entscheidungsschwellen für verschiedene SNR-Werte. Im Bereich von 6 dB bis 11 dB hat die optimale Entscheidungsschwelle etwa den Wert 0,95. Der ganz exakte Wert ist auch nicht interessant, weil sich die BER ohnehin im Rahmen der Simulationsgenauigkeit nicht signifikant ändert. Ab etwa 12 dB steigt die optimale Entscheidungsschwelle dann deutlich an. Der Grund liegt wieder einmal in der Suboptimalität der Berechnung der Varianz der SAL-Störung, wie sie im Anhang A.5.1 aufgezeigt wird. In dem

Tabelle 3.1: Optimale Entscheidungsschwellen für ein 4×4 -System mit MMSE-Detektion

SNR	$\mathcal{R}_{\text{th, opt}}$
6 dB	$\approx 0,95$
7 dB	$\approx 0,95$
8 dB	$\approx 0,95$
9 dB	$\approx 0,95$
10 dB	$\approx 0,95$
11 dB	$\approx 1,00$
12 dB	1,5
13 dB	6,5
14 dB	7,0
15 dB	7,5
16 dB	8,5

SNR-Bereich, in dem die Störung durch das Gaußsche Rauschen überwiegt, spielt die suboptimale Berechnung der Varianz der SAL-Störung nur eine untergeordnete Rolle. Nimmt mit steigendem SNR der Einfluss des Gaußschen Rauschens immer weiter ab, dann macht sich eine fehlerhaft berechnete Varianz der SAL-Störung bemerkbar. Der Decoder wird dann mit einer falschen Varianz initialisiert und decodiert folglich nicht mehr richtig. Um die BER zu senken, muss eine fehlerhafte Varianzberechnung vermieden werden. Weil dies systembedingt nicht möglich ist (siehe Anhang A.5.1), wird auf eine Symbolauslöschung verzichtet. Dies wird durch eine Erhöhung der Entscheidungsschwelle erreicht.

Der Bereich um 12 dB in Tabelle 3.1, ab dem die Entscheidungsschwelle ansteigt, ist genau der SNR-Bereich in dem die BER-Kurve des Systems mit SAL-Berücksichtigung (aber ohne schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung) in Abbildung 3.7 bei Verwendung von MMSE flacher wird und im weiteren Verlauf die BER-Kurve des Systems mit paralleler Detektion bei höheren SNR-Werten schneidet.

Ein Anstieg der optimalen Entscheidungsschwelle bedeutet für den Detektionsprozess, dass weniger Symbole subtrahiert werden. Man nähert sich also der parallelen Detektion an, die

man für $\mathcal{R}_{\text{th,opt}} \rightarrow \infty$ erreicht. Der Anstieg der optimalen Schwellenschwelle ist ein Indiz dafür, dass der Effekt der unvollständigen Berücksichtigung der SAL-Störung durch die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung kompensiert wird. Die genauen Auswirkungen der optimalen Schwellenschwelle auf die BER werden die Simulationsergebnisse zeigen.

Die exzessive Suche nach der optimalen Schwelle ist wenig elegant. Daher wäre es wünschenswert, wenn die Suche entweder durch elegante Methoden im Voraus oder sogar während des Betriebs adaptiv geschehen könnte. Zwei Möglichkeiten werden im Folgenden vorgestellt.

3.5.4.1 Bestimmung mit Hilfe von EXIT-Charts

Die in [19] behandelten EXIT-Charts bieten eine anschauliche und leistungsfähige Möglichkeit, das Verhalten von iterativen Empfängern vorauszusagen. Diese Technik lässt sich auch bei nichtiterativen Empfängern anwenden, da es sich hierbei um eine Untermenge der iterativen Empfängern handelt. Die Theorie der EXIT-Charts soll hier aber nicht behandelt werden.

Die Simulation der EXIT-Charts oder einzelner Punkte aus dem EXIT-Chart ist um ein vielfaches schneller als die Simulation von Bitfehlerhäufigkeiten. Aus dem EXIT-Chart lassen sich allerdings Vorhersagen für die zu erwartende BER ableiten. Grob gesagt soll bei gegebener a priori Information I_A (hier: $I_A = 0$) die resultierende extrinsische Information I_E maximiert werden. Die (numerische) Berechnung der extrinsischen Information kann nun für einige Werte von \mathcal{R}_{th} durchgeführt werden. Die maximale extrinsische Information bestimmt den optimalen Schwellwert $\mathcal{R}_{\text{th,opt}}$. So ist auch Abbildung 3.9 entstanden. Bei diesem Verfahren muss man zwar immer noch im Voraus die optimale Schwelle bestimmen. Aber die Berechnung geht schnell und ist zuverlässig.

In [44] wurde kürzlich eine Methode veröffentlicht, wie die a priori Information sowie die extrinsische Information während des Betriebes gemessen werden kann. Das Verfahren beruht auf Beträgen von L -Werten. Dies ist für den hier vorliegenden Fall um so interessanter, da auch bei der Bestimmung von $\mathcal{R}(s_j)$ die Beträge der L -Werte verwendet werden. Man beginnt mit einer willkürlich festgelegten Schwellenschwelle und misst über einen bestimmten Zeitraum die a priori Information und die extrinsische Information. Dann verändert man die Schwellenschwelle und beobachtet die Änderung der extrinsischen Information. Auch wenn dies aufwändig erscheint, kann während des Betriebs \mathcal{R}_{th} systematisch verändert werden, um die BER zu senken. So ist eine nachgeregeltere Anpassung möglich.

3.5.4.2 Bestimmung über die Analyse von Histogrammen

In [45] wurde dargestellt, dass eine Bestimmung der optimalen Schwelle auch durch eine Analyse von Histogrammen beziehungsweise daraus resultierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen möglich ist. Die Grundgedanken sind wie folgt:

Abhängig von der Detektionsreihenfolge lassen sich sämtliche Zuverlässigkeitswerte $\mathcal{R}(s_{d_1})$ des zuerst detektierten Symbols s_{d_1} in einem Histogramm $\mathcal{H}_1(\mathcal{R}(s_{d_1}))$ erfassen. Man erfasst also die Häufigkeitsverteilung von $\mathcal{R}(s_{d_1})$ über viele Symbolvektoren. Ebenso lassen sich die Zuverlässigkeitswerte aller übrigen detektierten Symbole in ihrer Detektionsreihenfolge in Histogrammen $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{R}(s_{d_\mu}))$ ($\mu = 2, \dots, M$) erfassen. Man beachte, dass alle Histogramme nur Einträge im Bereich $[0; \infty)$ haben. In [45] wurde nun empirisch festgestellt, dass die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathcal{H}_1(k\Delta_{\mathcal{H}}) - \mathcal{H}_2(k\Delta_{\mathcal{H}}) \right)^2 \Delta_{\mathcal{H}} \quad (3.119)$$

genau dann minimal ist, wenn $\mathcal{R}_{\text{th}} = \mathcal{R}_{\text{th, opt}}$ gilt, also wenn die BER minimal ist. Dabei wurde der Einfachheit halber angenommen, dass die Histogramm-Quantisierungsstufen $\Delta_{\mathcal{H}}$ immer gleich groß und in allen Histogrammen identisch sind. Gleichung (3.119) ist ein Maß für die Unterschiedlichkeit von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . Die Erklärung für diesen Sachverhalt ist recht einleuchtend. Die Detektion des ersten Symbols ist – da es sich um das erste Symbol handelt – noch nicht durch eine falsche Symbolauslöschung gestört. Das Histogramm $\mathcal{H}_1(\mathcal{R}(s_{d_1}))$ stellt daher in dieser Hinsicht den ungestörten Fall dar. Die Form des zweiten Histogramms $\mathcal{H}_2(\mathcal{R}(s_{d_1}))$ hängt von der Wahl der Entscheidungsschwelle im ersten Detektionsschritt ab. Ziel ist es nun, durch geeignete Wahl der Entscheidungsschwelle dieses Histogramm möglichst gut an den optimalen Fall anzunähern, was durch die Minimierung von (3.119) erreicht wird. Das heißt, auch hier findet eine Nachregelung von \mathcal{R}_{th} statt, welche die Langzeiteigenschaften des Übertragungskanals berücksichtigt.

In analoger Weise werden auch alle weiteren Histogramme durch die Wahl des Schwellwertes an das Histogramm des ersten Symbols angeglichen. Dies gibt berechtigten Anlass für die Frage, ob die optimale Entscheidungsschwelle von μ , also vom Detektionsschritt, abhängt. In [46] wurde genau diese Fragestellung durch Simulation untersucht und negativ beantwortet. Das heißt, die optimale Entscheidungsschwelle hängt nicht vom Detektionsschritt ab. Dies vereinfacht das Verfahren natürlich sehr.

Darüber hinaus wurde in [45] auch ein Ansatz für eine analytische Berechnung der optimalen Schwelle aufgezeigt. Allerdings ist dies nur für ein System mit maximal 2 Sendeantennen praktikabel und führt auch in diesem Fall wiederum auf Gleichungen, die nur durch Tabellen oder aufwändige Suche lösbar sind.

3.5.5 Effiziente Berechnung der Detektionsvektoren

Die Berechnung der Detektionsvektoren bei sequentieller Symbolauslöschung lässt sich sehr effizient durchführen. Es ist nicht notwendig, stets (3.73) zu berechnen. Um dies an einem Beispiel (siehe unten) zu verdeutlichen und bereits auf die iterative Struktur in Kapitel 4.1.3 vorzubereiten, nehmen wir in diesem Unterkapitel an, es läge a priori Information $L_a(x_k^j)$

der Bits vor¹⁷. Das entsprechend erweiterte Blockschaltbild ist in Abbildung 3.10 dargestellt und wird im Folgenden erklärt.

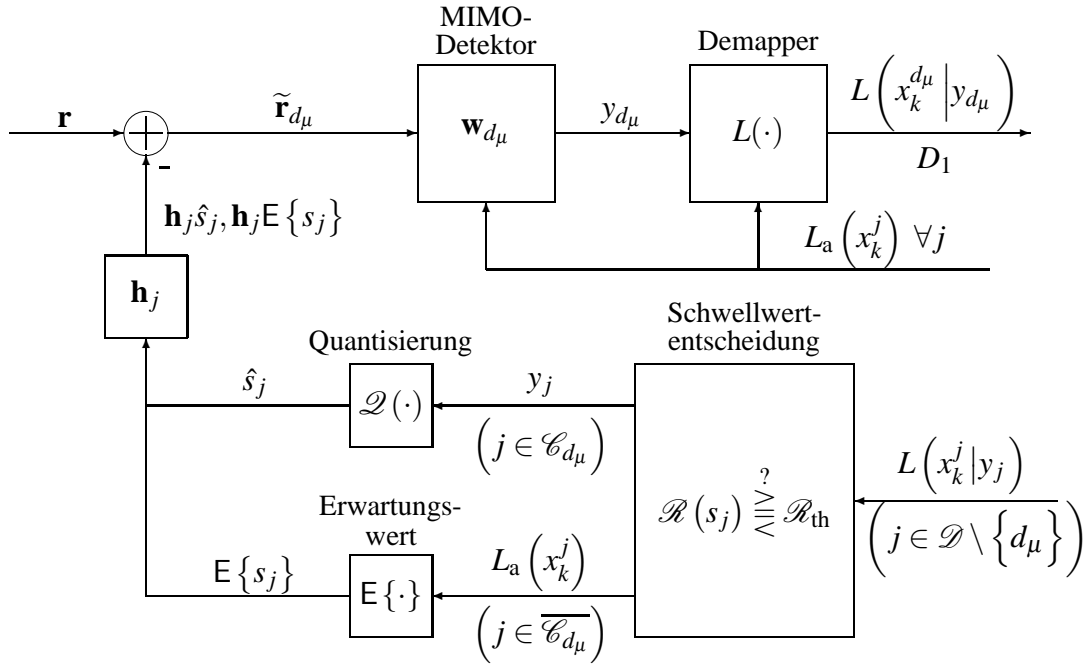


Abbildung 3.10: Aufbau eines MIMO-Detektors zur Detektion des d_μ -ten Symbols mit schwellwertentscheidungsbasierter Symbolauslöschung bei vorhandener a priori Information

Wie bisher auch wird vor der Symbolauslöschung eine Schwellwertentscheidung durchgeführt. Fällt diese Entscheidung positiv aus, dann wird das Symbol subtrahiert und die entsprechende Spalte in der Kanalmatrix zu Null gesetzt. Da dies für alle Symbole $\in \mathcal{C}_{d_\mu}$ zutrifft, führt dies auf

$$W = R_s H_{\mathcal{C}_{d_\mu}}^* \left(H_{\mathcal{C}_{d_\mu}} R_s H_{\mathcal{C}_{d_\mu}}^* + R_n \right)^{-1}. \quad (3.120)$$

Betrachtet man sich Gleichungen (3.69) und (3.73) und vergleicht sie mit (3.120) dann sieht man, dass die Nullsetzung der Spalte äquivalent dazu ist, den entsprechenden Eintrag in R_s zu Null zu setzen¹⁸. Die Einträge von R_s sind aber gerade die Varianz (Unsicherheit) der Sendesymbole. Bei der Subtraktion der quantisierten Symbole geht man also in der weiteren Rechnung davon aus, dass die Unsicherheit (Varianz) bei der Quantisierung 0 ist. Dies macht sich umgekehrt betrachtet dadurch bemerkbar, dass man die entsprechenden Spalten in H zu 0 setzt.

Was passiert aber mit den Symbolen, die zwar bereits detektiert wurden, deren Schwellwertentscheidung aber negativ war und deshalb nicht subtrahiert werden? In diesem Fall soll ja

¹⁷Der Übergang zu keiner a priori Information ist hinterher ganz einfach möglich, indem man $L_a(x_k^j) = 0$ setzt.

¹⁸Aus diesem Grund wurde in Kapitel 3.2 schon darauf hingewiesen, dass dieses Nullsetzen an beiden Stellen geschehen soll.

das quantisierte Symbol nicht subtrahiert werden, um eine wahrscheinliche Fehlerfortpflanzung zu vermeiden. Darum greift man für diese Symbole anstelle auf die Quantisierung auf deren Erwartungswert zurück¹⁹. Der Erwartungswert wiederum berechnet sich aus den a priori Werten. Gleichermaßen bildet man zusätzlich auch für diejenigen Symbole den Erwartungswert, die noch gar nicht detektiert worden sind. Man bildet also für alle Symbole, deren Indices in $\overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}$ sind, den jeweiligen Erwartungswert und subtrahiert diesen vom Empfangsvektor (siehe Blockschaltbild).

Aus den L -Werten lassen sich über die Symbolauftrittswahrscheinlichkeit auch die Varianz (Unsicherheit)

$$\sigma_{s,j}^2 \quad (j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}) \quad (3.121)$$

der Symbole in $\overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}$ bestimmen (siehe Anhang A.4). Damit kann man die entsprechenden Einträge in R_s aus (3.69) den tatsächlichen Verhältnissen besser anpassen: Der Wert E_s (ohne a priori Wissen) wird durch den neu berechneten Wert $\sigma_{s,j}^2$ ersetzt. Dieses Vorgehen bringt aber nur für solche Konstellationsdiagramme Vorteile, bei denen es Signalpunkte gibt, deren tatsächliche Energie vom Mittelwert der Konstellation abweichen. Bei anderen Konstellationen wird mit E_s auch ohne a priori Information bereits die richtige Varianz verwendet.

Ein Beispiel soll die soeben beschriebene Vorgehensweise zunächst verdeutlichen und anschließend verallgemeinert auf eine effiziente Berechnung der Detektionsvektoren führen. In einen MIMO-System mit $M = 4$ Sendeantennen seien die Symbole s_1 und s_3 bereits detektiert und deren L -Werte liegen vor, wobei nur s_3 auch subtrahiert wurde. Das Symbol s_2 soll nun als drittes detektiert werden ($d_3 = 2$) und s_4 wird erst später bearbeitet. Die Varianz $\sigma_{s,1}^2$ wird aus den a priori L -Werten von Symbol s_1 berechnet, weil s_1 zwar detektiert wurde, aber nicht subtrahiert wird. $\sigma_{s,2}^2$ wird zu E_s gesetzt, da dieses Symbol nun detektiert werden soll. Sein Index ist weder in \mathcal{C}_{d_μ} noch in $\overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}$ enthalten. Außerdem setzt man $\sigma_{s,3}^2 = 0$, da bei der Subtraktion die sichere Entscheidung vorausgesetzt wird. s_4 wird erst später detektiert, und deshalb nimmt man ebenfalls das a priori Wissen in Form der L -Werte und bestimmt damit $\sigma_{s,4}^2$. Für die Kovarianzmatrix R_s folgt damit

$$R_s = \begin{pmatrix} \sigma_{s,1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{s,4}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

Dies ist zwar noch eine Diagonalmatrix, aber keine Skalarmatrix mehr, und (3.75) ist nicht mehr gültig. Statt dessen gilt die allgemeine Form nach (3.73), mit der die Detektionsvektoren nun berechnet werden müssen. Weil R_s dennoch Nullelemente in der Diagonalen besitzt, kann die Berechnung der d_μ -ten Zeile der Detektionsmatrix für die Detektion des d_μ -ten

¹⁹Die vorteilhafte Verwendung des Erwartungswertes wurde in [35] empirisch untersucht.

Symbols ($\mu = 1, \dots, M$) sehr effizient mit

$$\mathbf{w}_{d_\mu} = \sigma_{s, d_\mu}^2 \mathbf{h}_{d_\mu}^* \left(\sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \sigma_{s, j}^2 \mathbf{h}_j^* + 2\sigma_n^2 I_N \right)^{-1} \quad (3.123)$$

erfolgen [36, 42]. Im μ -ten Detektionsschritt wird explizit $\sigma_{s, d_\mu}^2 = E_s$ gesetzt, und es folgt

$$\mathbf{w}_{d_\mu} = E_s \mathbf{h}_{d_\mu}^* \left(\sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \sigma_{s, j}^2 \mathbf{h}_j^* + 2\sigma_n^2 I_N \right)^{-1}. \quad (3.124)$$

Damit lässt sich aus

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \mathbf{r} - \sum_{j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}} \mathbf{h}_j E\{s_j\} - \sum_{j \in \mathcal{C}_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \quad (3.125)$$

in Abbildung 3.10

$$y_{d_\mu} = \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} s_{d_\mu} + \sum_{j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - E\{s_j\}) + \sum_{j \in \mathcal{C}_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) + \tilde{n}_{d_\mu} \quad (3.126)$$

berechnen und dem Demapper zuführen. Im Demapper und zur Berechnung von (3.124) sind die a priori Werte der codierten Bits notwendig. Bei dem Term

$$\sum_{j \in \overline{\mathcal{C}_{d_\mu}}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - E\{s_j\}) \quad (\mu = 1, \dots, M) \quad (3.127)$$

handelt es sich nach wie vor um die Intrasymbolvektorinterferenz, die nun allerdings um den Erwartungswert bereinigt ist. Die Varianz der ISVI – wie in (3.89) berechnet – ändert sich *dadurch* nicht, da

$$\text{var}\{x\} = \text{var}\{x - E\{x\}\} \quad (3.128)$$

gilt. Allerdings ändert sich durch die vorhandene a priori Information die Varianz der Symbolenergie, so dass die Varianz der ISVI nun allgemein mit (3.89) und nicht mit (3.91) berechnet werden muss.

Zuletzt nochmals der Hinweis, dass ohne vorhandene a priori Information die Varianz in der Kovarianzmatrix R_s auf den Mittelwert $\sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 = E_s$ gesetzt wird. Als Erwartungswert für ein Symbol wird ebenfalls der Mittelwert verwendet. Bei einem zum Koordinatenursprung symmetrischen Konstellationsdiagramm ist dieser Erwartungswert dann 0. Das heißt, es findet implizit keine Subtraktion statt, und das Blockschaltbild in Abbildung 3.10 reduziert sich auf Abbildung 3.8, bei dem der Signallaufpfad mit Erwartungswert nicht vorhanden ist.

3.5.6 Berechnungsaufwand bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung

In diesem Kapitel möchte ich kurz qualitativ über den Berechnungsaufwand bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung im Vergleich zur parallelen Detektion und zur sequentiellen Symbolauslöschung sprechen.

Weil man bei der parallelen Detektion nur eine Detektionsmatrix und daher nur eine Matrixinversion berechnen muss, ist deren Berechnungsaufwand am geringsten. Bei der sequentiellen Detektion muss für jeden Detektionsschritt eine Matrixinversion berechnet werden, da sich die Kanalmatrix virtuell bei jedem Detektionsschritt ändert. Optional kommt die Berechnung der optimalen Detektionsreihenfolge hinzu.

Bei der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung muss nach jedem Detektionsschritt die Zuverlässigkeitsinformation berechnet und diese mit der Entscheidungsschwelle verglichen werden. Erst danach weiß man, ob das Symbol subtrahiert werden darf und wie im Detektionsprozess weiter verfahren wird. Dies bedeutet zunächst einen Mehraufwand. Optional kommt auch hier die Berechnung der optimalen Detektionsreihenfolge hinzu. Allerdings profitiert man von einer negativen Schwellwertentscheidung. Das heißt, wenn ein Symbol nicht subtrahiert wird, spart man sich die Berechnung einer weiteren Matrixinversion, da man in diesem Fall auf die Inverse aus dem vorangegangenen Schritt zurückgreifen kann. Dies führt auf einen sehr erfreulichen Umstand: Im Vergleich zur sequentiellen Detektion sinkt die BER und gleichzeitig wird auch der Berechnungsaufwand reduziert.

Abbildung 3.11 zeigt eindrucksvoll, wie leistungsfähig die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung im Vergleich zu allen anderen Detektionsmethoden ist. Die sequentielle Detektion ohne Berücksichtigung der Varianz der SAL-Störung beim Demapper ist, wie bereits in Zusammenhang mit Abbildung 3.7 beschrieben, die schlechteste Variante. Berücksichtigt man die Varianz der SAL-Störung, so hat man (bei diesem System) bis zu einem SNR von etwa 20 dB einen Vorteil gegenüber der parallelen Detektion. Ab 20 dB stößt die Berücksichtigung der SAL-Störung an ihre Grenzen. Die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung ist jedoch über den gesamten SNR-Bereich besser als alle anderen. Dabei kann man zwei Bereiche unterscheiden. Bis etwa 12 dB ist die BER fast identisch mit derjenigen der sequentiellen Detektion mit SAL-Berücksichtigung. In diesem Bereich erreicht man mit der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung eine Verringerung des Rechenaufwands bei gleicher BER. Ab 12 dB kommt die SAL-Berücksichtigung zunehmend an ihre Leistungsgrenze. Dann wird der optimale Schwellwert größer und kompensiert dadurch diesen Umstand. Es fällt weiterhin auf, dass die Diversität der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung offensichtlich größer ist als $N - M + 1 \stackrel{M=N=4}{=} 1$ und damit größer als die Diversität der parallelen Detektion. Das heißt, die BER fällt mit steigendem SNR steiler. Der Grund dafür liegt klar auf der Hand. Durch die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung wird die Subtraktion von fehlerhaft detektierten Symbolen verhindert. Damit steigt die Diversität tatsächlich, während sie bei der parallelen Detektion für alle Symbole gleich bleibt.

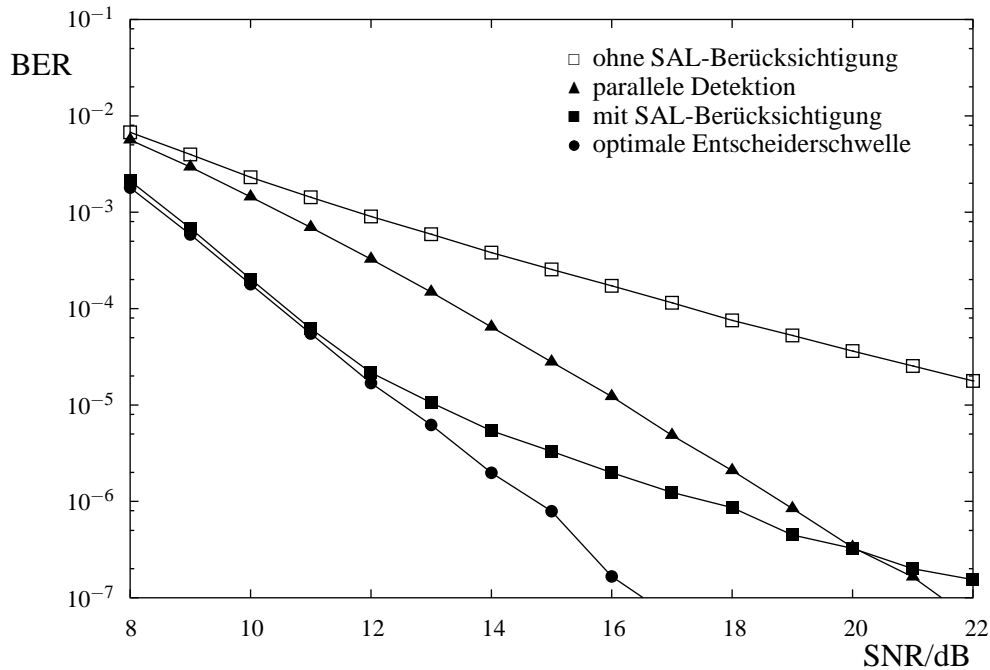


Abbildung 3.11: BER für MMSE, QPSK, Gray Mapping, codiert, 4×4 , parallele Detektion sowie sequentielle SAL ohne und mit Berücksichtigung der Varianz der durch SAL hervorgerufenen Störung im Vergleich zur schwelwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung mit optimaler Entscheidungsschwelle

Mit der schwelwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung ist es nun möglich, die Methoden der sequentiellen Detektion auch in codierten Systemen zu verwenden, ohne dass die BER für große SNR größer wird als für die parallele Detektion. Bis dato waren codierte Systeme wegen diesem Nachteil auf die parallele Detektion beschränkt.

3.6 Das Optimum: MAP-Detektion

In diesem Kapitel wird von der bisher dargestellten Empfängerstruktur abgewichen und stattdessen der optimale Empfänger, nämlich die MAP-Detektion, vorgestellt. Bisher wurde das $M \times N$ -MIMO-Übertragungssystem durch die ZF- oder MMSE-Detektion in M entkoppelte 1×1 -Übertragungssysteme transformiert und anschließend gemäß (2.26) ein Demapping durchgeführt. Dabei wurde über alle möglichen Signalpunkte des Konstellationsdiagramms *einer* Antenne permutiert. Da im Zähler und im Nenner dabei jeweils ein Bit fest gesetzt wurden, waren bei Q Bit pro Symbol insgesamt $2^{Q-1} = \frac{2^Q}{2}$ Bit-Permutationen notwendig. Pro Symbolvektor, der aus M Elementen besteht, sind das insgesamt also $M \cdot 2^{Q-1}$ Permutationen.

Bei der optimalen MAP-Detektion²⁰ betrachtet man das gesamte $M \times N$ -MIMO-Übertra-

²⁰Da in diesem Kapitel nur die nullte Iteration, also der erste Durchlauf durch die Detektionsstufe betrachtet wird, und das a priori Wissen zu Null vorausgesetzt wird, haben alle Symbole die gleiche Häufigkeit und die MAP-Detektion ist mit der ML-Detektion identisch.

gungssystem²¹ und permutiert beim Demapping nicht nur über die Signalpunkte einer Antenne, sondern über alle möglichen Symbolkombinationen aller Antennen, wobei im Zähler und im Nenner wieder je ein Bit fest gesetzt werden. Bei M Antennen und Q Bit pro Symbolvektor sind dazu 2^{MQ-1} Bit-Permutationen notwendig. Dies deutet bereits die enorme Komplexität an, die im nächsten Unterkapitel noch kurz betrachtet wird. Die Anzahl der Permutationen ist wie bei ZF und MMSE unabhängig von N . Deutlich muss hier erwähnt werden, dass die Einschränkung (3.1) bei dieser Detektionsmethode nicht notwendig ist. Die Anzahl der Empfangsantennen kann durchaus kleiner sein als die Anzahl der Sendeantennen.

Das Demapping für den optimalen MAP-Detektor vollzieht sich also durch

$$L(x_k^j | \mathbf{r}) = L_a(x_k^j) + \ln \frac{\sum_{v=0}^{2^{MQ-1}-1} p(\mathbf{r} | x_k^j=1, x_{l,l=0,\dots,MQ-1,l \neq k}^j) \cdot \exp\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{MQ-1} x_l^j \cdot L_a(x_l^j)\right)}{\sum_{v=0}^{2^{MQ-1}-1} p(\mathbf{r} | x_k^j=0, x_{l,l=0,\dots,MQ-1,l \neq k}^j) \cdot \exp\left(\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{MQ-1} x_l^j \cdot L_a(x_l^j)\right)}, \quad (3.129)$$

wobei stets

$$\sum_{l=0}^{k-1} x_l^j \cdot 2^l + \sum_{l=k+1}^{MQ-1} x_l^j \cdot 2^{l-1} = v \quad (3.130)$$

zu erfüllen ist.

3.6.1 Berechnungskomplexität

Es ist bereits angeklungen, dass die Berechnungskomplexität für den optimalen MAP-Detektor ansteigt. Zwar fallen gegenüber dem ZF- oder MMSE-Detektor je nach Betriebsart Matrixoperationen, die Suche nach der optimalen Detektionsreihenfolge oder der Schwellwertvergleich weg, aber die Anzahl der Permutationen steigt stark an. Dabei muss man berücksichtigen, dass für jede Permutation die Wahrscheinlichkeitsdichte- und Exponentialfunktionen ausgewertet werden müssen, was eine nicht unerhebliche Berechnungskomplexität darstellt und die praktische Nutzung des optimalen MAP-Detektors bei größeren MIMO-Systemen verhindert. Tabelle 3.2 zeigt die Anzahl der Permutationen für verschiedene Anzahlen von Sendeantennen und Bit pro Symbol sowohl für den optimalen $M \times N$ -MAP-Detektor als auch für M parallele 1×1 -MAP-Detektoren.

Bei einer 16-QAM und 6 Sendeantennen müssen zum Beispiel im Falle der ZF- oder MMSE-Detektion 48 Permutationen berechnet werden. Bei der MAP-Detektion werden $2^{23} \approx 8,4 \cdot 10^6$ Permutationen benötigt. Also rund 175000 mal mehr.

Abbildung 3.12 zeigt eine ganze Reihe von BER-Kurven für die MAP-Detektion. Wegen des hohen Rechenaufwands sind aber nur Systeme mit wenigen Antennen unter Verwendung der

²¹Das bedeutet, man berechnet nicht die y_j , sondern benutzt ausschließlich \mathbf{r} nach (2.20).

Tabelle 3.2: Anzahl der Permutationen beim M -maligen 1×1 -MAP-Detektor (obere Werte) und beim optimalem $M \times N$ -MAP-Detektor (untere Werte)

		Anzahl der Bit pro Symbol Q					
		1	2	3	4	5	6
Anzahl der Sendeantennen M	1	1	2	4	8	16	32
		1	2	4	8	16	32
	2	2	4	8	16	32	64
		2	8	32	128	512	2048
	3	3	6	12	24	48	96
		4	32	256	2048	16384	2^{17}
	4	4	8	16	32	64	128
		8	128	2048	32768	2^{19}	2^{23}
	5	5	10	20	40	80	160
		16	512	16384	2^{19}	2^{24}	2^{29}
	6	6	12	24	48	96	192
		32	2048	2^{17}	2^{23}	2^{29}	2^{35}

BPSK dargestellt. Sofort fällt im Vergleich zu den vorherigen Abbildungen auf, dass sich die BER-Kurven in einem niedrigeren SNR-Bereich bewegen. Dies ist unmittelbar ein Beleg für die Leistungsfähigkeit der MAP-Detektion. Zwei Merkmale lassen sich aus Abbildung 3.12 noch ablesen. Zum einen ist bei dieser Art der Detektion der Fall $M > N$ zwar möglich (kei-

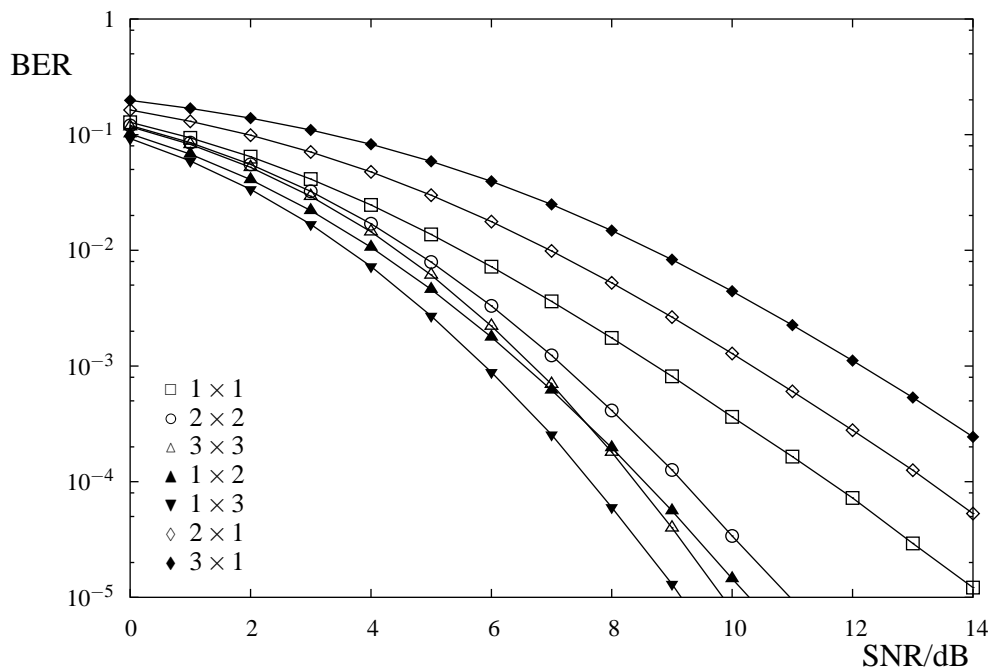


Abbildung 3.12: BER für MAP, BPSK, Gray Mapping, codiert, verschiedene Antennenkonfigurationen

ne Entkopplung auf 1×1 -Systeme notwendig), aber die BER ist deutlich größer als in den Fällen $M \leq N$. Andererseits kann man eine Aussage über die Diversität treffen: Der Grad der Diversität bei der MAP-Detektion eines uncodierten Systems beträgt stets $D = N$ [8], unabhängig von der Anzahl der Sendeantennen. Für codierte Systeme bleibt diese Unabhängigkeit von der Anzahl der Sendeantennen ebenfalls bestehen. So ist der BER-Abfall bei den Systemen 1×1 , 2×1 und 3×1 für großes SNR derselbe. Ebenso für alle anderen Systeme mit jeweils gleicher Anzahl an Empfängern. Es ist in Abbildung 3.12 noch zu beachten, dass die Datenrate linear mit der Anzahl der Sendeantennen ansteigt. Es werden hier also BER-Kurven unterschiedlicher Datenrate verglichen.

3.7 Einige weitere Detektionsmöglichkeiten

Sämtliche mögliche Detektionsverfahren aufzuzählen, spränge den Rahmen dieser Arbeit bei Weitem. Es sollen hier lediglich einige Ansätze genannt werden. In [37] wurden verschiedene Detektionsverfahren übersichtlich zusammengefasst. Der interessierte Leser sei auf die darin angegebenen Referenzen verwiesen. Erwähnen möchte ich die folgenden drei Möglichkeiten.

- In [47] wurde der *Square-Root-Algorithmus* vorgestellt, der bei der sequentiellen Symbolauslöschung die Nullsetzung (beziehungsweise Löschen der entsprechenden Matrix- und Vektoreinträge), Subtraktion und Bestimmung der Detektionsreihenfolge numerisch stabil und schnell berechnet.
- Um die Berechnungskomplexität der MAP-Detektion zu reduzieren, wurde vorgeschlagen, die Anzahl der möglichen Permutationen geeignet zu begrenzen, indem nur innerhalb eines bestimmten (mehrdimensionalen) Raumwinkels permutiert [48] beziehungsweise die Anzahl der untersuchten Permutationen durch einen Suchbaum reduziert wird [21].
- Eine hybride Methode, nämlich die Kombination aus MAP-Detektion und Detektion durch Matrixoperationen, wurde in [49] aufgezeigt. Dabei werden die Sendeantennen virtuell in Gruppen zusammengefasst. Die einzelnen Gruppen werden durch Matrixoperationen voneinander getrennt und innerhalb jeder Gruppe findet die MAP-Detektion Anwendung.

Kapitel 4

Iterative Detektoren

In den bisherigen Kapiteln wurde der erste Durchlauf (nullte Iteration) durch die Empfängerstruktur behandelt und die Grundlagen für weitere Iterationen gelegt. Tatsächlich lassen sich die angegebenen Gleichungen und die Empfängerstrukturen in einfacher Weise auf die iterative Betrachtung erweitern. Dazu muss im Prinzip lediglich das dann vorhandene a priori Wissen zusätzlich berücksichtigt werden¹. In den folgenden Unterkapiteln werden verschiedene iterative Strukturen behandelt. Dabei kann im Prinzip jede Iterationsmöglichkeit mit jedem der im gesamten Kapitel 3 vorgestellten Detektionsmethoden für die nullte Iteration kombiniert werden. Weil in Kapitel 3 bereits eine gute Grundlage gelegt worden ist, können die iterativen Strukturen relativ kurz und ohne übermäßig viele mathematische Herleitungen abgehandelt werden.

4.1 Iterationsmöglichkeiten unter Beibehaltung der bisherigen Empfängerstruktur

Nach dem APP-Decoder auf der Empfängerseite steht mit der extrinsischen Information E_2 beziehungsweise nach dem Interleaver mit A_1 neue a priori Information zur Verfügung (siehe Abbildung 2.3) und 3.10. Dieses a priori Wissen muss an geeigneter Stelle zurückgeführt werden, wobei stets ein Kompromiss zwischen Komplexität und Leistungsfähigkeit gefunden werden muss. Neben der gesondert betrachteten optimalen MAP-Detektion bieten sich grundsätzlich drei verschiedene Möglichkeiten der Informationsrückführung/Iteration an:

- Die Iteration über den Demapper
- Die Iteration über die Symbolauslöschung
- Die Iteration über den MIMO-Detektor

¹Gleichermaßen gilt dies für den Fall, wenn bereits in der nullten Iteration a priori Wissen vorhanden ist. Üblicherweise hat man allerdings kein Vorwissen. Dann wird die a priori Information zu 0 gesetzt.

Dabei schließt die zweite Form die erste mit ein und die Iteration über den MIMO-Detektor beinhaltet die beiden ersten Möglichkeiten.

4.1.1 Iteration über den Demapper

Die einfachste Iteration besteht darin, die a priori Information an den Demapper zurückzuführen. Dies ist deshalb einfach, weil dieses Vorgehen von herkömmlichen 1×1 -Übertragungssystemen bekannt ist. Abweichend von der allgemeinen iterativen Empfängerstruktur in Abbildung 2.3 gilt nun im Besonderen die Empfängerstruktur in Abbildung 4.1. Der

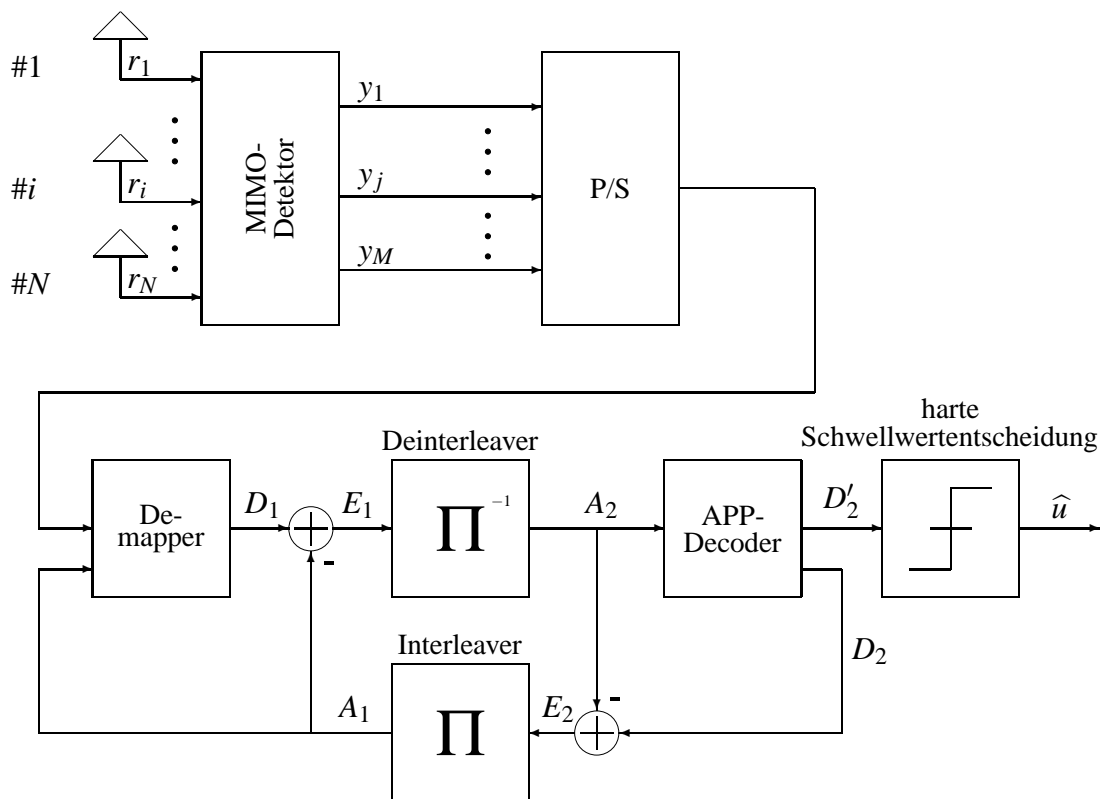


Abbildung 4.1: Empfängerstruktur für Iteration über den Demapper

MIMO-Detektor wird dabei lediglich einmal durchlaufen, was selbstverständlich eine erhebliche Reduzierung der Komplexität bedeutet. Danach ist die weitere iterative Signalverarbeitung identisch zu 1×1 -Übertragungssystemen. Damit behalten sämtliche Gleichungen ihre Gültigkeit. In jeder Iteration wird das Demapping gemäß (2.26) durchgeführt, wobei ab der ersten Iteration a priori Information zur Verfügung steht.

Unabhängig von den Iterationen kann man die Betriebsart im MIMO-Detektor wählen. ZF oder MMSE können mit der parallelen Detektion, der sequentiellen Symbolauslöschung oder der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung kombiniert werden. Die kleinste BER für die nullte Iteration wird mit der schwellwertentscheidungs-basierter Symbolauslö-

schung erzielt. Weil dadurch die Anfangsbedingungen für die weiteren Iterationen am besten sind, wird auch in den weiteren Iterationen dieses Verfahren die geringste BER erreichen.

4.1.1.1 Kombination von Mapping und Codierer

In [17, 19] wurde das iterative Zusammenspiel zwischen Demapper und Decodierer ausführlich untersucht. Nur bei passender Wahl von Mapping und Codierer (beziehungsweise dessen Generatorpolynomen) ist eine leistungsfähige iterative Signalverarbeitung möglich. Insbesondere kann die BER bei einer QAM nur durch Anti-Gray-Konstellationen oder Gray-Konstellationen mit mindestens 3 Bit pro Symbol iterativ reduziert werden. In [38] habe ich eine Kombination aus Mapper und Codierer präsentiert, die für derartige MIMO-Systeme ein bisher unerreicht frühes so genanntes Turbokliff² bewirkt. Durch die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung kann dieses Turbokliff bei gleichem Mapping und Codierer sogar noch zu geringerem SNR geschoben werden. Das verwendete Mapping ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Der systematische Faltungscodierer besteht wie bisher aus dem Vorwärtspolynom $G_{\text{okt}} = 7$ und dem Rückwärtspolynom $G_{\text{r,okt}} = 4$.

Eine weitere Reduzierung der BER ist möglich, wenn man die orthogonalen Konstellationsdiagramme verlässt und das Mapping \mathcal{A}_2 gemäß Abbildung 4.2 bei gleichem Codierer verwendet [50]. Dann *passen*³ Codierer und Konstellationsdiagramm noch besser zusammen. Diese nichtorthogonale Konstellation besteht aus zwei 8-PSK-Anordnungen, deren Radien unterschiedlich groß sind. Das besondere an dieser Konstellation ist, dass die Punkte der inneren 8-PSK allesamt ein gerades Hamming-Gewicht und die Punkte der äußeren 8-PSK alle ein ungerades Hamming-Gewicht haben. Selbstverständlich sind die Radien derart normiert, dass genau dieselbe mittlere Signalenergie E_s wie in Abbildung 2.2 resultiert.

In Abbildung 4.3 ist die BER für die Iteration über den Demapper für die beiden Konstellationsdiagramme \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 in den Abbildungen 2.2 und 4.2 dargestellt. Die BER nach der nullten Iteration ist im dargestellten SNR-Bereich für praktische Anwendungen nicht zu gebrauchen. Dies ändert sich allerdings mit zunehmender Anzahl an Iterationen. Nach 9 Iterationen ist bei etwa 8,7 dB ein Turbokliff vorhanden. Man sieht auch, dass die nichtorthogonale QAM \mathcal{A}_2 ein früheres Kliff und eine geringere Rest-BER (*error floor*) aufweist. Eine weitere Reduzierung der BER ist für die orthogonale QAM \mathcal{A}_1 nach 44 Iterationen und für die nichtorthogonale QAM nach 29 Iterationen nicht mehr möglich. Auch diese Fälle sind eingezeichnet. Das Turbokliff tritt bei etwa 8,2 – 8,3 dB auf. Wie gesagt, erreicht aber die nichtorthogonale Konstellation dieses Turbokliff mit deutlich weniger Iterationen. Auch ist die verbleibende Rest-BER merkbar geringer. Beides begründet sich in der bereits angesprochenen Kombination von Codierer und Konstellationsdiagramm.

²Damit wird das sprunghafte Abfallen der BER bezeichnet, wie es bei iterativen Decodierverfahren vorkommen kann.

³Im Sinne der jeweiligen Transfercharakteristik im EXIT-Diagramm [19, 38].

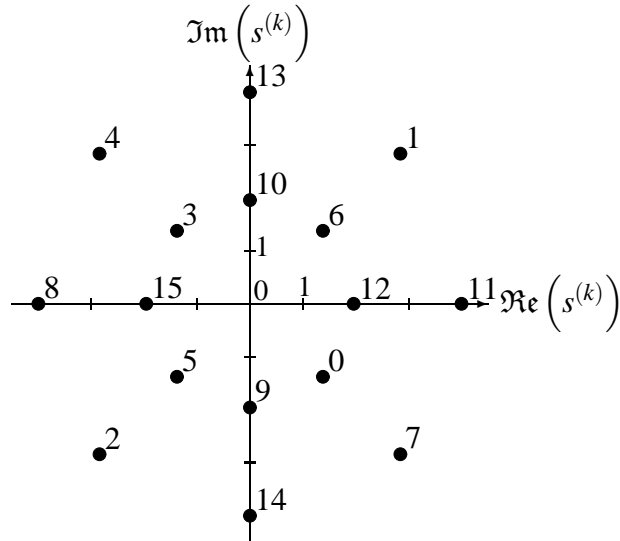


Abbildung 4.2: Konstellationsdiagramm \mathcal{A}_2 einer nichtorthogonalen 16-QAM

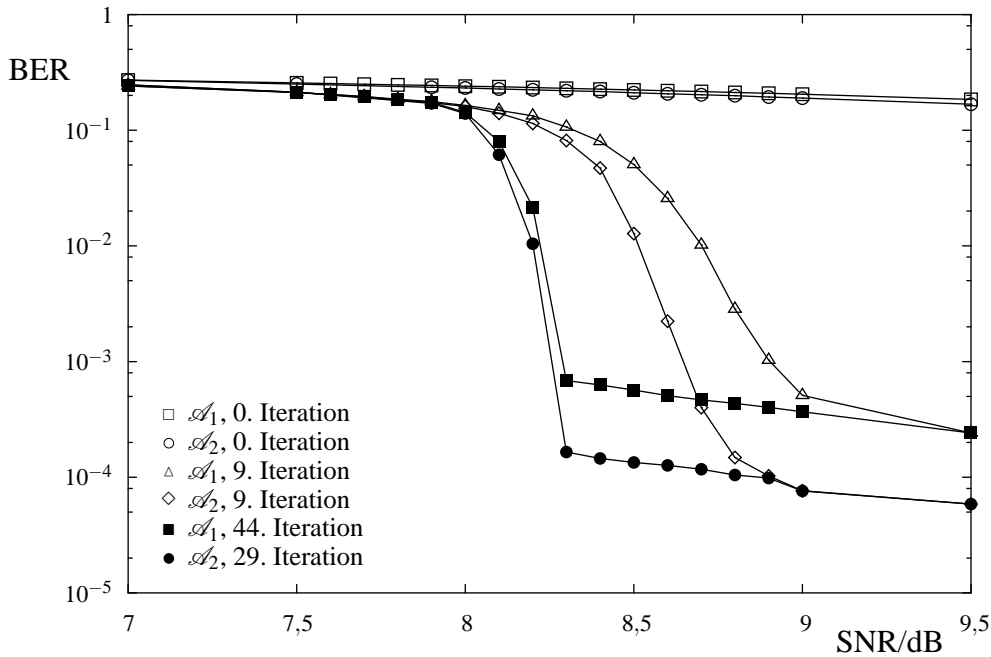


Abbildung 4.3: BER für MMSE, 6×6 , zwei verschiedene 16-QAM-Konstellationen, Anti-Gray Mapping, codiert, $G_{\text{akt}} = 7$, $G_{r,\text{akt}} = 4$, $R_{\text{th}} = 1,2$, Iteration über das Demapping

Diese einfache Iterationsmöglichkeit wurde interessanterweise in der MIMO-Literatur bisher kaum berücksichtigt. Ein Grund ist sicherlich, dass mit dieser Struktur die räumlichen Eigenschaften (*space*) in der Codierung nicht optimal ausgenutzt werden. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Komplexität beim optimalen Verfahren, welches die räumlichen Eigenschaften voll ausnutzt, exponentiell mit M steigt, wohingegen bei diesem Iterationsschema der Anstieg nur linear mit M ist. Dies spricht für ein einfaches Iterationsschema. Darüber hinaus können, wegen der Anlehnung an ein 1×1 -System, Standardkomponenten

verwendet werden. Dennoch werden sehr gute Ergebnisse erzielt.

Ein weiterer Einwand könnte die große Anzahl der Iterationen sein, zum Beispiel 44 in einem Fall in Abbildung 4.3. Wenn man sich allerdings die Größenordnungen der Permutationen aus Tabelle 3.2 ins Gedächtnis zurück holt, stellt man fest, dass die Komplexität im Vergleich zum optimalen MAP-Detektor immer noch sehr gering ist, insbesondere im hier betrachteten Fall eines 6×6 -Systems mit 16-QAM. Die Anzahl von 48 Permutationen pro Iteration (siehe Tabelle 3.2) bei 6 Sendeantennen und 4 Bit pro Symbol ist selbst bei 44 Iterationen im Vergleich zu 2^{23} Permutationen beim MAP-System verschwindend gering. Ein nichtiteratives 6×6 -MAP-System mit 16-QAM kann derzeit wegen des riesigen Rechenaufwands nicht simuliert werden – ganz zu schweigen von einem iterativen System.

4.1.2 Iteration über die Symbolauslöschung

In [51] wurde die iterative Symbolauslöschung für uncodierte MIMO-Systeme vorgestellt, die auf Symbolverarbeitungsebene operieren. Das Prinzip beruht darauf, dass man ab dem zweiten Durchlauf (erste Iteration) eine zusätzliche Symbolauslöschung durchführt⁴. Die Details können der angegebenen Literaturstelle entnommen werden.

Das Verfahren auf Symbolebene muss nun auf die Bitebene eines codierten Systems übertragen werden. Dies geschieht derart, dass aus den vom Interleaver nach dem Decoder zurückgelieferten a priori Werten Schätzwerte der gesendeten Symbole gemäß (A.35) berechnet und diese dann, ähnlich wie bei der sequentiellen Symbolauslöschung, vom Vektor \mathbf{r} subtrahiert werden. Dabei werden vor der Detektion eines Symbols s_j allerdings *alle anderen* Symbole s_k ($k \neq j$) subtrahiert. Auf diese Weise hat man M entkoppelte $1 \times N$ -SIMO-Systeme hergestellt. Allein wegen dieser Tatsache ist anzunehmen, dass die Bitfehlerhäufigkeit auf Grund der Empfangsdiversität geringer ausfallen wird als bei M parallelen 1×1 -Systemen. Mit den M verschiedenen neu berechneten Empfangsvektoren der $1 \times N$ -Systeme wird dann ohne weitere Matrix- oder Vektoroperationen ein Demapping durchgeführt. Mit jeder Iteration wird die a priori Information zuverlässiger, die Auslöschung besser und die Bitfehlerhäufigkeit immer geringer. Das Blockschaltbild in Abbildung 4.4 verdeutlicht diese Empfängerstruktur.

Die Qualität dieses Detektionsverfahrens hängt in hohem Maße von der Güte der nullten Iteration ab. Denn darauf basiert letztendlich die Information, die vom Decoder zurückgeliefert wird. Wenn diese a priori Information auf Grund ungenügender Detektion fehlerbehaftet ist, dann kommt es durch die Subtraktion der Schätzwerte wie bei der sequentiellen Symbolauslöschung zu einer Fehlerfortpflanzung, die iterativ zu einer sehr hohen BER führt. Dieses Verhalten wurde in [43] untersucht. Im Ergebnis muss die Qualität des Informationsrückflusses abhängig vom verwendeten Decoder und vom Mapping einen gewissen Wert übersteigen,

⁴Diese Art der Symbolauslöschung darf nicht mit der sequentiellen oder schwellwertentscheidungsbasier- ten Symbolauslöschung in dieser Arbeit verwechselt werden.

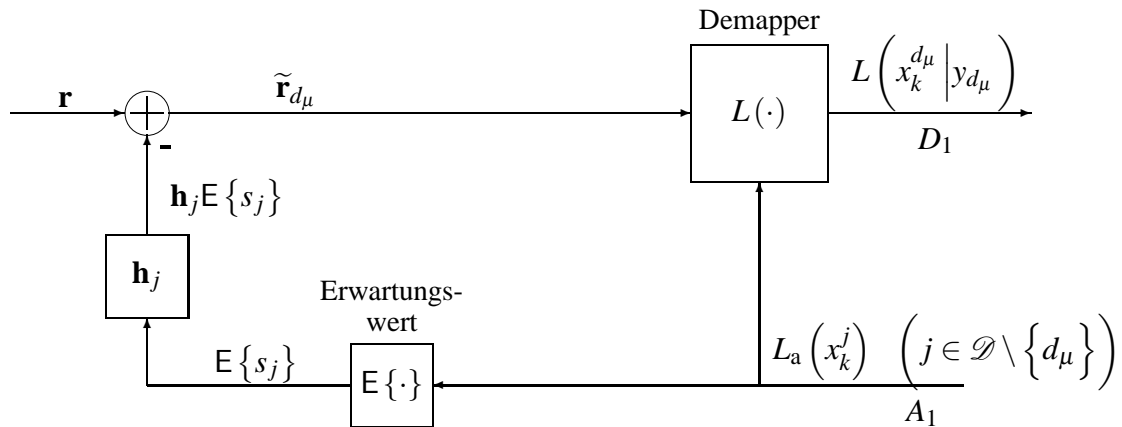


Abbildung 4.4: Empfängerstruktur für Iteration über die Symbolauslöschung

damit diese Art der Iteration überhaupt in der gewünschten Weise funktioniert. Diese Funktionsschwelle ist im BER-Diagramm in Abbildung 4.5 durch das Turbokliff verdeutlicht. Unterhalb der Schwelle von etwa 12 dB versagt die Iteration über die Symbolauslöschung völlig. Jenseits des Turbokliffs geht die Bitfehlerhäufigkeit dagegen gegen 0. Im Gegensatz zur Iteration über den Demapper tritt das Kliff bei etwa 4 dB höheren SNR-Werten auf. Dafür ist keine Rest-BER vorhanden.

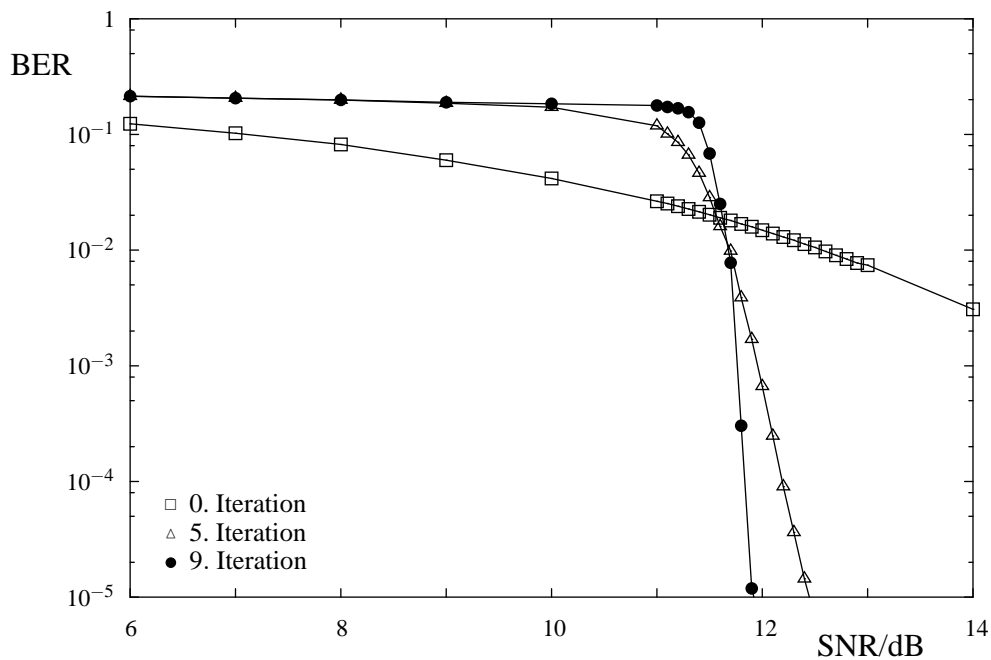


Abbildung 4.5: BER für MMSE in 0. Iteration und dann Iteration über die Symbolauslöschung, 6×6 , 16-QAM, Gray Mapping, codiert

4.1.3 Iteration über den MIMO-Detektor

Die konsequenteste und leistungsfähigste Iterationsmöglichkeit unter Beibehaltung der MIMO-Detektionsstufe ist die Iteration über den MIMO-Detektor [36, 42, 52]. Dabei wird das a priori Wissen benutzt, um zum einen eine Interferenzreduktion zu erreichen und zum anderen die einzelnen Zeilenvektoren \mathbf{w}_j der Detektionsmatrix W an die Gegebenheiten anzupassen. Abbildung 4.6 zeigt das entsprechende Blockdiagramm des MIMO-Detektors mit anschließendem Demapping für den μ -ten Detektionsschritt. Es ist mittlerweile fast selbst erklärend.

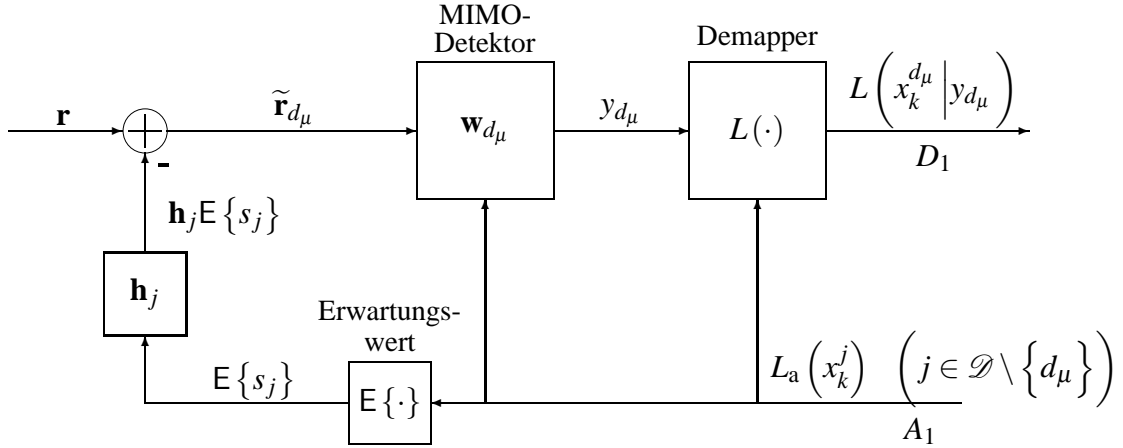


Abbildung 4.6: Empfängerstruktur für Iteration über den MIMO-Detektor

Die a priori Werte stammen vom Faltungsdecoder und werden mit jeder Iteration zuverlässiger. Sie werden bei dieser Art der Iteration an drei Stellen verwendet. Genau genommen wird bei der Detektion des d_μ -ten ($\mu = 1, \dots, M$) Symbols s_{d_μ} ausschließlich die a priori Information aller anderen Sendesymbole s_j ($j \in \mathcal{D} \setminus \{d_\mu\}$) herangezogen, um deren Störeinflüsse zu reduzieren. Zum einen wird aus den a priori Werten der Erwartungswert der entsprechenden Symbole berechnet und nach der Rekonstruktion mit den entsprechenden Einträgen der Kanalmatrix vom Empfangssignal subtrahiert. Es ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \mathbf{r} - \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \{d_\mu\}} \mathbf{h}_j E\{s_j\} \quad (4.1)$$

Weiterhin findet die a priori Information bei der Berechnung des Detektionsvektors \mathbf{w}_{d_μ} gemäß (3.124) über $\sigma_{s,j}^2$ in R_s Verwendung. $\sigma_{s,j}^2$ wird ebenfalls aus der a priori Information berechnet. Es folgt

$$y_{d_\mu} = \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} s_{d_\mu} + \tilde{n}_{d_\mu} + \sum_{j \in \mathcal{D} \setminus \{d_\mu\}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - E\{s_j\}) \quad (4.2)$$

Zuletzt wird die a priori Information auch im Demapper benutzt, der sie gemäß (2.26) berücksichtigt. Da die a priori Information von der vorangegangenen Iteration stammt, ist es möglich, alle Symbole in jeder Iteration parallel zu detektieren.

4.1.3.1 Schwellwertentscheidung in den Iterationen

Es ist auch in den Iterationen möglich, die Ideen der sequentiellen Symbolauslöschung in Kombination mit der Schwellwertentscheidung anzuwenden. In Abbildung 4.7 ist das zugehörige Blockschaltbild zu sehen. Es ist die Erweiterung von Abbildung 3.10.

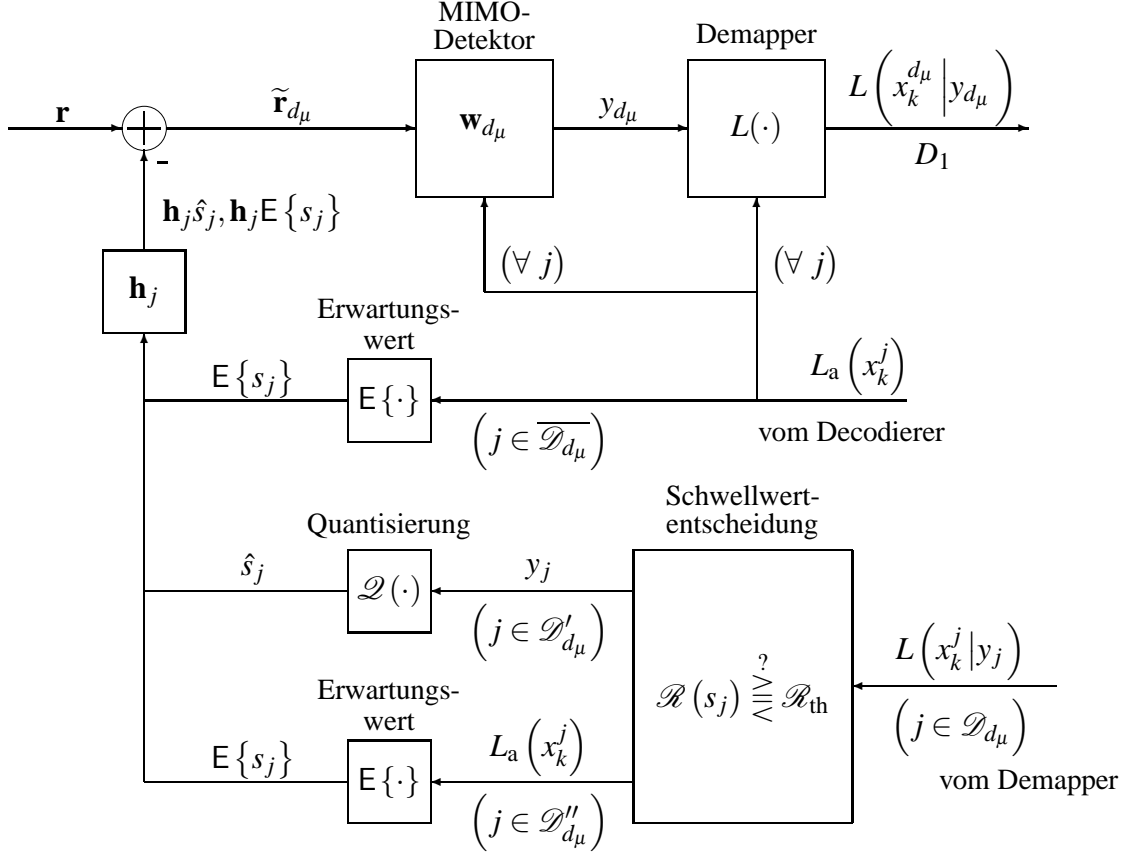


Abbildung 4.7: Empfängerstruktur für Iterationen über die gesamte MIMO-Detektionsstufe bei gleichzeitiger Berücksichtigung der generierten a posteriori Information und Anwendung der schwellwertentscheidungs-basierten Symbolauslöschung

In jeder Iteration werden die Indexmengen je nach den vorherrschenden Gegebenheiten neu bestimmt. Solange ein Symbol j innerhalb einer Iteration noch nicht detektiert wurde ($j \in \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}$), wird aus dessen a priori Information der Erwartungswert gebildet und nach der Rekonstruktion subtrahiert. Sobald das Symbol innerhalb einer Iteration detektiert wurde ($j \in \mathcal{D}_{d_\mu}$), hängt es von der Schwellwertentscheidung ab, ob weiterhin nur der Erwartungswert ($j \in \mathcal{D}''_{d_\mu}$) oder das quantisierte Symbol ($j \in \mathcal{D}'_{d_\mu}$) subtrahiert wird.

In Analogie zu (4.1) und (4.2) ergibt sich für diesen Fall

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d_\mu} = \mathbf{r} - \sum_{j \in \mathcal{D}''_{d_\mu} \cup \overline{\mathcal{D}_{d_\mu}}} \mathbf{h}_j E\{s_j\} - \sum_{j \in \mathcal{D}'_{d_\mu}} \mathbf{h}_j \hat{s}_j \quad (4.3)$$

und

$$y_{d_\mu} = \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} s_{d_\mu} + \tilde{n}_{d_\mu} + \sum_{j \in \mathcal{D}'_{d_\mu} \cup \overline{\mathcal{D}'_{d_\mu}}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \mathbb{E}\{s_j\}) + \sum_{j \in \mathcal{D}'_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) \quad . \quad (4.4)$$

Bei der sequentiellen Detektion stellt sich wieder die Frage nach der optimalen Detektionsreihenfolge. Die Antwort darauf kann allerdings sehr schnell gegeben werden, da die entsprechenden Gleichungen aus Kapitel 3.4.3 beziehungsweise A.4 auch innerhalb der Iterationen gültig sind und verwendet werden können, wenn die a priori Information entsprechend berücksichtigt wird.

4.1.3.2 Abhängigkeit des optimalen Schwellwertes $\mathcal{R}_{\text{th, opt}}$ von der a priori Information

Mit jeder Iteration steigt der Informationsgehalt der zurück geführten a priori Information. Daher stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, in wie weit der optimale Schwellwert $\mathcal{R}_{\text{th, opt}}$ von der Nummer der Iteration abhängt. Und selbst wenn er davon abhängt, ist es interessant, in wie weit eine Variation der Entscheidungsschwelle Auswirkungen auf die BER hat. In [42] wurde diese Abhängigkeit durch Simulationen mit folgendem Ergebnis untersucht:

- Die optimale Entscheidungsschwelle steigt mit der Anzahl der Iterationen. Dies ist sofort plausibel, da auch der Betrag der L -Werte mit jeder Iteration steigt.
- Eine Variation der Entscheidungsschwelle hat nur sehr kleine Auswirkungen auf die BER. Die Ursache liegt darin, dass bei Iteration über den MIMO-Detektor nicht mehr so sehr darauf ankommt, ob ein quantisiertes Symbol oder dessen Erwartungswert subtrahiert wird. Für perfektes a priori Wissen sind diese beiden Größen ohnehin identisch.
- Die optimale Entscheidungsschwelle steigt mit steigendem SNR, da für große SNR der Gewinn durch Codierung (und damit die Beträge der L -Werte) zunimmt.

Abbildung 4.8 zeigt die 0. und die 1. Iteration verschiedener Empfängerstrukturen. Als Referenz ist das interferenzfreie 1×4 -MMSE-System eingezeichnet. Dieses stellt die untere Grenze dar, die ein 4×4 -System mit MMSE-Detektion iterativ erreichen kann. Nämlich dann, wenn eine perfekte Symbolauslöschung erreicht wird. Für das System mit optimaler Entscheidungsschwelle wurden in der nullten Iteration die Entscheidungsschwellen nach Tabelle 3.1 verwendet. Für die erste Iteration sind die verwendeten optimalen Entscheidungsschwellen in Tabelle 4.1 angegeben. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass auch die iterative schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung die geringste BER aufweist. Der Unterschied zur parallelen Detektion beträgt in der ersten Iteration etwa 0,5 dB. Interessant ist auch, dass die sequentielle Detektion, bei der alle Symbole subtrahiert werden, in der nullten Iteration deutlich besser abschneidet als die parallele Detektion (dies ist aus Kapitel 3 bereits bekannt), sich die Verhältnisse in der ersten Iteration aber umkehren. Dort ist die

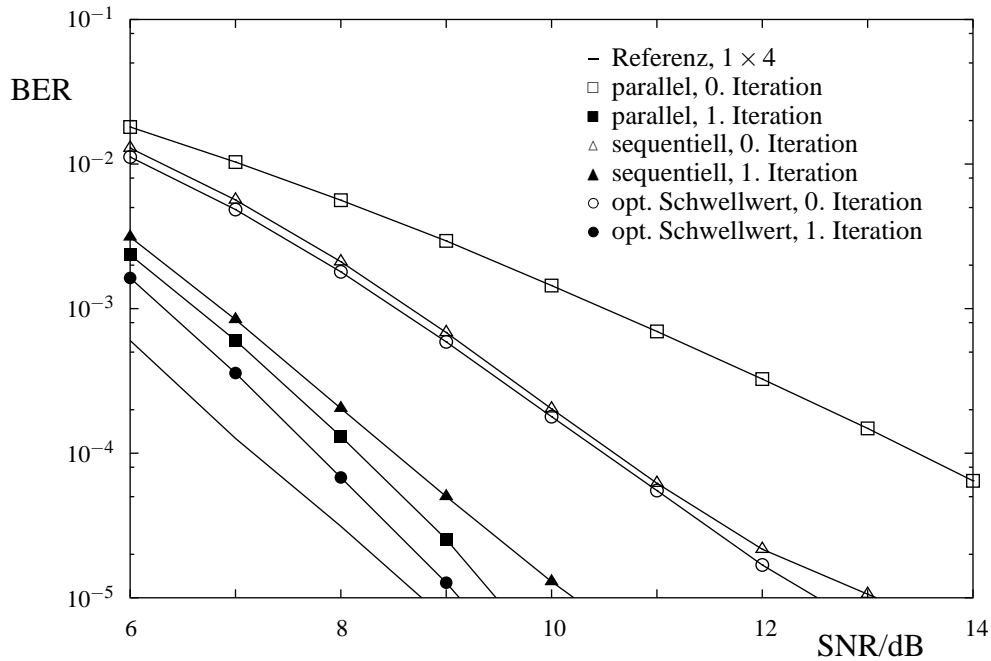


Abbildung 4.8: BER für MMSE, 4×4 , QPSK, Gray Mapping, 0. und 1. Iteration, parallele, sequentielle und schwellwertentscheidungs-basierte Detektion

Tabelle 4.1: Optimale Entscheiderschwellen für die 1. Iteration für ein 4×4 -System mit MMSE-Detektion

SNR	$\mathcal{R}_{th, opt}$
6 dB	7,0
7 dB	12,0
8 dB	15,0
9 dB	16,0
10 dB	17,0

parallele Detektion besser als die sequentielle Detektion. Der Grund dafür liegt darin, dass bei der sequentiellen Detektion die SAL-Störung zwar berücksichtigt wird, aber dennoch eine Fehlerfortpflanzung stattfindet, deren negative Folgen durch eine iterative Detektion nicht mehr zu beheben sind.

4.2 Iterationen bei anderen Empfängerstrukturen

4.2.1 MAP-Iteration

Abweichend von der bisherigen iterativen Empfängerstruktur soll hier zur Vervollständigung die optimale MAP-Iteration erwähnt werden. Dies geschieht ganz einfach in der Weise, dass in jeder Iteration das Demapping gemäß (3.129) durchgeführt wird, wobei das a

priori Wissen der vorausgegangenen Iteration entsprechend berücksichtigt wird. Der ohnehin schon große Berechnungsaufwand steigt darum linear mit der Anzahl der Iterationen. Abbildung 4.9 zeigt verschiedene iterative Systeme mit MAP-Detektion. Dabei wurde eine

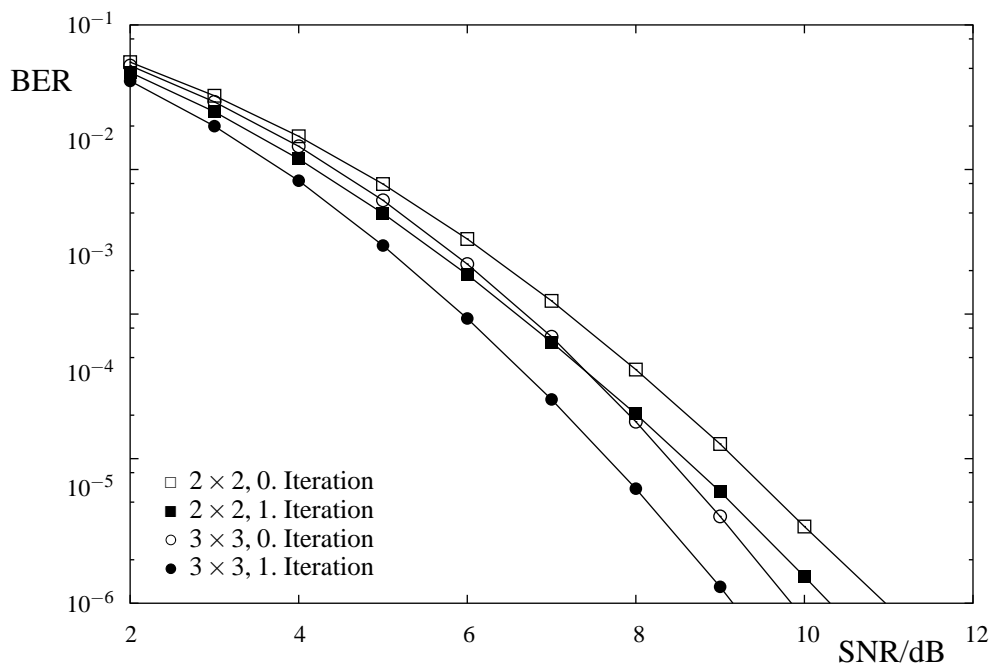


Abbildung 4.9: BER für iteratives MAP, BPSK, Gray Mapping, codiert, verschiedene Antennenkonfigurationen

BPSK verwendet. Es ist bekannt [17], dass bei einer BPSK in einem 1×1 -System iterativ keine Verbesserung der BER möglich ist, wenn das Mapping als innerer Codierer fungiert, da die Bits wegen des Interleavers alle unabhängig voneinander sind. Darum ist dieser Fall nicht eingezeichnet. Bei mehr als einer Sendeantenne hängen die Bits über den MIMO-Matrixkanal auch zwischen den Antennen voneinander ab, so dass im Falle der BPSK wenigstens in der ersten Iteration eine Verringerung der BER stattfindet. Weitere Iterationen bringen keinen Vorteil. Je mehr Antennen verwendet werden, je weiter man sich also sozusagen vom 1×1 -System entfernt, desto höher fällt der Gewinn in der Iteration aus. Beim 2×2 -System beträgt er etwa 0,5 dB und beim 3×3 -System etwa 1 dB.

Bei einer QPSK mit Gray Mapping ist für ein 1×1 -System iterativ ebenfalls keine Verringerung der BER zu erreichen. Dies ist erst bei zwei oder mehr Sendeantennen der Fall. Es existiert allerdings auch eine Anti-Gray-QPSK. Deren Verwendung führt in den Iterationen zu einer deutlichen BER-Reduktion. Der Preis, den man dafür zahlen muss ist allerdings eine höhere BER in der nullten Iteration im Vergleich zur Gray-QPSK. Abbildung 4.10 zeigt die angesprochenen Verhältnisse für die nullte und die zweite Iteration. Die Anti-Gray-Konstellationen haben in der nullten Iteration eine höhere BER. Nach zwei Iterationen ist diese aber schon deutlich geringer als die der Gray-Konstellation. Zu beobachten ist auch wieder, dass Systeme mit gleicher Anzahl Sendeantennen für großes SNR dieselbe Steigung in der BER-Kurve besitzen.

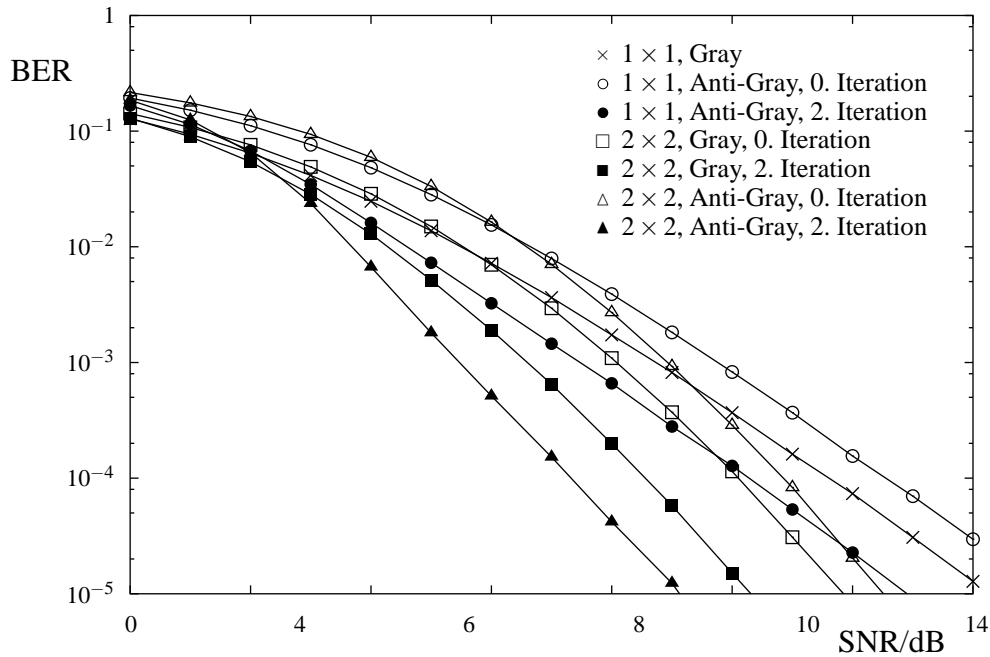


Abbildung 4.10: BER für iteratives MAP, QPSK, Gray und Anti-Gray Mapping, codiert, verschiedene Antennenkonfigurationen

4.2.2 Einige weitere Iterationsmöglichkeiten

Bei der MIMO-Detektion sind eine ganze Reihe von weiteren Iterationen denkbar. Selbst bei den hier bisher vorgestellten Möglichkeiten sind weitere Variationen möglich. Im Folgenden werden zwei prinzipielle Verfahren kurz beleuchtet.

4.2.2.1 Iteration innerhalb der Detektionsstufe

Bisher wurde in allen vorgestellten Methoden jedes Symbol im MIMO-Detektor einmal detektiert und an den Demapper für die Berechnung der L -Werte weitergereicht. Denkbar sind daher Verfahren, die zusätzlich zur äußeren Iteration auch innerhalb des MIMO-Detektors (auf Symbolebene) iterieren. Gegebenenfalls kann die L -Wert-Berechnung in diese *innere* Iteration einbezogen werden.

Durch diese zusätzliche Iterationsschleife kann man zwei Dinge erreichen. Zum einen kann die Detektionsreihenfolge iterativ an die tatsächlichen Verhältnisse angepasst werden. Die Detektionsreihenfolge, wie sie in den Kapitel 3.2.3 und 3.4.3 hergeleitet wurde, ist *für uncodierte Symbole* im Mittel optimal. Abhängig vom tatsächlich aufgetretenen Rauschwert ist eine andere Detektionsreihenfolge zu einem speziellen Zeitpunkt bei einem speziellen Symbolvektor eventuell geeigneter. Zu anderen kann in weiteren Iterationen die Diversität bei der Detektion vergrößert werden. Bei der sequentiellen Symbolauslöschung nimmt die Diversität mit jedem richtig detektierten Symbol zu. Das zuletzt detektierte Symbol kommt so in den Genuss der größten Diversität, während die zu Beginn detektierten Symbole mit

einer kleinen Diversität auskommen müssen. In einer iterativen Detektion könnte die Detektionsreihenfolge bei jeder Iteration permutiert werden und zum Beispiel für jedes Symbol nur das arithmetische Mittel aus allen Iterationen an den Demapper weitergereicht werden. Die L -Werte würden dann nur für das arithmetische Mittel berechnet werden.

Generell muss dabei abgewogen werden, ob sich der Mehraufwand tatsächlich lohnt. In [53] wurde zum Beispiel eine alternative Bestimmung der Detektionsreihenfolge untersucht, die auf a posteriori L -Werten aufbaut und damit die BER anstelle der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit minimiert. Im Prinzip werden dabei zuerst alle Symbole parallel detektiert und deren L -Werte berechnet. Anschließend wird das Symbol subtrahiert, das den größten Zuverlässigkeitswert $\mathcal{R}(s_j)$ ($j = 1, \dots, M$) besitzt. Die verbliebenen Symbole werden wiederum parallel detektiert und deren L -Werte nochmals berechnet. Wieder wird dann das Symbol mit dem größten Zuverlässigkeitswert subtrahiert. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis letztendlich alle Symbole subtrahiert wurden. Der gewonnene Vorteil bezüglich der BER ist allerdings nur gering, so dass sich dieser Aufwand nicht lohnt.

4.2.2.2 Iteration über verkettete Codes / Ausblick

Eine ganz andere Möglichkeit ist die Iteration über zwei verkettete Codes nach dem ursprünglichen Prinzip der Turbo-Codes [54]. Dabei wird das Sendesignal mit zwei verschiedenen Codes codiert⁵. Auf der Empfängerseite wird zunächst der herkömmliche MIMO-Detektor mit anschließendem Demapping durchlaufen. Dann beginnt man mit der äußeren Turbo-Decodierung, bei der die extrinsische Information zwischen den beiden Decodern ausgetauscht wird. Dies hat im eigentlichen Sinn zunächst nichts mehr mit der MIMO-Detektion zu tun. Interessant wird es aber, wenn man nach einigen Turbo-Iterationen (zwischen den zwei Decodern) wieder in den MIMO-Detektor eintritt. Man führt die Turbo-Iterationen zum Beispiel solange durch, bis auf diese Weise kein Informationszugewinn mehr möglich ist. Dann geht man wieder in den MIMO-Detektor, detektiert die Symbole mit der gewonnenen a priori Information neu und tritt nach dem Demapping wiederum in die Turbo-Iterationen ein.

Eine Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist, wie oft die Turbo-Iterationen durchgeführt werden und wann nochmals in den MIMO-Detektor zurückgekehrt wird. Ein möglicher Ansatz, wie diese Frage beantwortet werden kann, ist in [43] zu finden. Dabei wird die extrinsische Information im Zusammenhang mit dem Verlauf der EXIT-Chart-Kennlinien ausgewertet. Qualitativ lässt sich so vorhersagen, in welchem Bereich der extrinsischen Information ein Wechsel von der Turbo-Decodierung zurück zur MIMO-Detektion von Vorteil ist.

Prinzipiell ist auf diese Weise auch ein vollständiger Wechsel der Detektionsmethode beziehungsweise der iterativen Informationsrückführung denkbar. In Kapitel 4.1.2 bei der Iteration über die Symbolauslöschung wurde beobachtet, dass dies nur dann zur geringen BER

⁵Es ist auch möglich, zwei Mal denselben Code zu verwenden und die Abhängigkeiten der Bits am Eingang der beiden Codierer über einen Interleaver zu eliminieren.

führt, wenn die zurückgeführte Information zuverlässig genug ist, also bei höheren SNR-Werten. Dann allerdings geht die BER iterativ gegen 0. Bei der Iteration über das Demapping in Kapitel 4.1.1 sinkt die BER bereits bei niedrigen SNR. Es bleibt jedoch eine Rest-BER zurück. Nun könnte man eine kombinierte Detektionsmethode entwerfen, bei der solange über den Demapper iteriert wird, bis die zurückgeführte extrinsische Information den Wert übersteigt, der für eine Iteration über die Symbolauslöschung notwendig ist. Dann fährt man mit der Iteration über die Symbolauslöschung fort. Damit erreicht man beides: Konvergenz der BER bei niedrigen SNR und Eliminierung der Rest-BER.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden nichtiterative und iterative Empfängerstrukturen für voll-ratige MIMO-Übertragungssysteme untersucht. Ausgangspunkt waren die Detektionsmethoden des Null-Erzwingens (*zero-forcing*, ZF) und des minimalen mittleren quadratischen Fehlers (*minimum mean squared error*, MMSE) im linearen Fall und die maximale a posteriori Wahrscheinlichkeit (*maximum a posteriori probability*, MAP) im nichtlinearen Fall. Bei der MMSE-Detektion wird das am Empfänger auftretende Gaußsche Rauschen bei der Berechnung der Detektionsmatrix berücksichtigt. Aus diesem Grund ist die Leistungsfähigkeit der MMSE-Detektion stets größer als die der ZF-Detektion. Während bei der ZF-Detektion lediglich die Filterung des Rauschens zu berücksichtigen ist, tritt bei der MMSE-Detektion eine geringe Intrasymbolvektorinterferenz auf. Deren Varianz wurde ermittelt und in den der Detektion nachfolgenden Schritten berücksichtigt.

Durch die sukzessive Symbolauslöschung und dem damit verbundenen Übergang von der parallelen zur sequentiellen Detektion konnte die Bitfehlerhäufigkeit im uncodierten System reduziert werden. Im codierten Fall gelingt dies nur, wenn man den durch eine falsche Symbolauslöschung (möglicherweise) verursachten Fehler durch seine Varianz beim Demapping und auch im anschließenden Decodierer berücksichtigt. Dann lässt sich auch im codierten Fall in einem großen SNR-Bereich die Bitfehlerhäufigkeit reduzieren. Eine vollständige Berücksichtigung der durch falsche Symbolauslöschung hervorgerufenen Fehler ist allerdings auf diese Weise theoretisch nicht möglich, da man sich noch diesseits des Decodierers befindet.

Um den nachteiligen Effekt der unerwünschten Fehlerfortpflanzung zu umgehen, wurde die schwellwertentscheidungs-basierte Symbolauslöschung eingeführt. Dazu wurde zunächst eine Zuverlässigkeitsinformation auf Symbolebene definiert, mit deren Hilfe richtig quantisierte Symbole mit großer Genauigkeit identifiziert werden können. Dadurch war es möglich, in großer Anzahl nur richtig entschiedene Symbole zu subtrahieren und so die Bitfehlerhäufigkeit noch weiter zu senken. Mit diesem Verfahren wird die Leistungsfähigkeit des MIMO-Detektor erheblich gesteigert und die Diversität erhöht.

Den Abschluss der nichtiterativen Detektionsverfahren bildete die optimale MAP-Detektion. Diese ist allerdings für große QAM-Konstellationen und/oder mehr als etwa 4 Antennen we-

gen des enormen Rechenaufwands derzeit in der Praxis nicht realisierbar. Auch die Rechner-simulation stößt derzeit an die Grenze. Gleichwohl wird von allen vorgestellten Detektions-verfahren nur mit der optimalen MAP-Detektion die volle Diversität von MIMO-Systemen ausgenutzt.

Als Erweiterung der nichtiterativen Verfahren wurden einige iterative Verfahren behandelt. Prinzipiell unterscheiden sich diese in dem Punkt des Blockschaltbilds, an dem die zurück-gelieferten a priori Information eingekoppelt werden. Mit der einfachsten Methode, näm-lich der Iteration über den Demapper, lassen sich bei passender Wahl von Konstellationsdia-gramm und Codierer hervorragende Ergebnisse, insbesondere ein frühes Turbokliff, erzielen. Allerdings muss man dazu mitunter häufig iterieren. Auch bleibt hier eine so genannte Rest-BER (*error floor*) zurück.

Bei der Iteration über die Symbolauslöschung benötigt man dagegen eine hohe Zuverlässig-keit der zurück geführten a priori Information. Die benötigte Zuverlässigkeit wird allerdings erst für größerer SNR-Werte erreicht. Dies resultiert in einem späten Turbokliff, verhindert aber auch eine Rest-BER. Durch die Kombination der Iteration über den Demapper mit der Iteration über die Symbolauslöschung kann man beides erreichen: Ein frühes Turbokliff und die Eliminierung der Rest-BER.

Die Iteration über den MIMO-Detektor ist schließlich der bestmögliche Fall einer linearen Detektion. Dabei wird die zurückgeführte a priori Information nicht nur zur Symbolauslö-schung benutzt, sondern dient auch dazu, die Detektionsvektoren exakter an die Gegeben-heiten anzupassen, das heißt, die Kovarianzmatrix des Sendevektors bei der Berechnung der Detektionsvektoren zu berücksichtigen. Auch in diesem Fall lässt sich mit der schwellwert-entscheidungs-basierten Symbolauslöschung noch eine weitere Reduktion der BER erzielen.

Zuletzt wurde die Iteration auch bei der optimalen MAP-Detektion eingesetzt. In diesem Fall ist natürlich die geringste BER erzielbar. Auch hier kommt es auf die Wahl des Kon-stellationsdiagramms an. Wegen des sehr hohen Berechnungsaufwands ist die Realisierung allerdings derzeit nicht vorstellbar.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch die elegante Ausnutzung der übertragungs-technischen Seiteninformationen eine starke Reduzierung der Bitfehlerhäufigkeit bei An-wendung der ZF- oder MMSE-Detektion möglich ist. Die mathematischen Verfahren der linearen Algebra konnten auf diese Weise sehr deutlich verbessert werden. Durch hybride Verfahren, die sowohl MMSE als auch MAP-Techniken verwenden, bietet die MIMO-Übertragungstechnik ein großes Potential für die Zukunft drahtloser Systeme.

Anhang A

Mathematische Herleitungen

A.1 Beweis der Nullvektor-Eigenschaften der Pseudoinversen

Es wird der folgende

Satz 1. *Wenn die m -te Spalte von H ein Nullvektor ist, dann ist die m -te Zeile von H^\dagger ein Zeilen-Nullvektor.*

bewiesen.

Beweis. Eine Möglichkeit, die Pseudoinverse H^\dagger einer $N \times M$ -Matrix H ($N > M$) zu bestimmen, ist (siehe [25])

$$H^\dagger = R (R^* R)^{-1} (F^* F)^{-1} F^* \quad (\text{A.1})$$

wobei F alle $r = \text{rang}(H) = \text{rang}(F)$ linear unabhängigen Spalten von H enthält und R so gewählt wird, dass

$$H = F R^* \quad (\text{A.2})$$

gilt. Nach der Voraussetzung des Satzes soll H einen Nullvektor in der m -ten Spalte besitzen. Daher gilt

$$\max \{r\} = M - 1 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Es ist offensichtlich, dass F N Zeilen und r Spalten und R^* r Zeilen und M Spalten besitzt. Wegen (A.2) hat R^* ebenfalls einen Nullvektor in der m -ten Spalte. Die restlichen Spalten von R^* hängen vom Rang r und von der Position der linear abhängigen Spalten von H ab. Für den weiteren Beweis ist dies aber unerheblich. Die Matrix R hat als konjugiert transponierte Matrix von R^* dann in der m -ten Zeile einen Nullvektor. Bei der Berechnung der Pseudoinversen gemäß (A.1) wird $(R^* R)^{-1} (F^* F)^{-1} F^*$ von links mit R multipliziert und damit hat H^\dagger ebenfalls in der m -ten Zeile einen Nullvektor. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Nun folgt noch der Beweis von folgendem Satz:

Satz 3. Die Pseudoinverse von $H_{\{d_1\}}$ hängt mit der Pseudoinversen von $H_{\overline{\{d_1\}}}$ über die Beziehung

$$\left(H_{\{d_1\}}\right)^\dagger = \left(\left(H_{\overline{\{d_1\}}}\right)^\dagger\right)_{\{d_1\}} \quad (\text{A.4})$$

zusammen.

Beweis. Ausgangspunkt ist die Berechnung der Pseudoinversen nach (A.1). Wenn H in der d_1 -ten Spalte einen Nullvektor besitzt, dann hat R^* wegen (A.2) ebenfalls einen Nullvektor in der d_1 -ten Spalte. Löscht man nun die Nullspalte aus H heraus, dann hat H eine Spalte weniger. Die Matrix F und die Berechnung von $(F^*F)^{-1}F^*$ ändert sich dadurch nicht, da diese nach wie vor alle unabhängigen Spalten von H besitzt und die Nullspalte nicht dazu gehört. Die Matrix R^* ändert sich dahingehend, dass sie ebenfalls eine Spalte weniger besitzt, und zwar fehlt ihr ebenfalls genau diese Nullspalte. Alle anderen Matrixelemente sind dieselben. Entsprechend fehlt der Matrix R eine Nullzeile. Die Berechnung von R^*R liefert aber in beiden Fällen dasselbe Ergebnis. Somit unterscheidet sich die Berechnung der Pseudoinversen nur durch die Linksmultiplikation mit R – einmal mit und einmal ohne Nullzeile. Im Ergebnis hat die Pseudoinverse einmal eine Nullzeile und einmal nicht. Alle anderen Matrixelemente sind dieselben. Löscht man die Nullzeile heraus, so erhält man sofort das zweite Ergebnis. Damit ist der Satz bewiesen. \square

A.2 Anwendung des Matrix-Inversions-Lemmas

Mit Hilfe des Matrix-Inversions-Lemmas (3.79) soll die Gleichung

$$H^* (HH^* + \alpha I_N)^{-1} = (H^*H + \alpha I_M)^{-1} H^* \quad (\text{A.5})$$

hergeleitet werden. Dazu gehen wir zunächst von der etwas allgemeineren Form

$$H^* (HH^* + A)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

mit beliebiger, aber invertierbarer Matrix A aus. Damit folgt

$$\begin{aligned} & H^* (HH^* + A)^{-1} \\ \stackrel{(3.79)}{=} & H^* \left(A^{-1} - A^{-1}H \left(I_M + H^*A^{-1}H \right)^{-1} H^*A^{-1} \right) \\ = & H^*A^{-1} - H^*A^{-1}H \left(H^*A^{-1}H + I_M \right)^{-1} H^*A^{-1} \\ = & \left(H^*A^{-1}H + I_M \right) \left(H^*A^{-1}H + I_M \right)^{-1} H^*A^{-1} \\ & - H^*A^{-1}H \left(H^*A^{-1}H + I_M \right)^{-1} H^*A^{-1} \\ = & \underbrace{\left(\left(H^*A^{-1}H + I_M \right) - H^*A^{-1}H \right)}_{=I_M} \left(H^*A^{-1}H + I_M \right)^{-1} H^*A^{-1} \\ = & \left(H^*A^{-1}H + I_M \right)^{-1} H^*A^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Für $A = \alpha I_N$ wird $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I_N$ und (A.7) lässt sich weiter bis zur gewünschten Form vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \left(H^* A^{-1} H + I_M \right)^{-1} H^* A^{-1} \\ &= \left(H^* \frac{1}{\alpha} H + I_M \right)^{-1} H^* \frac{1}{\alpha} \\ &= \left(H^* H + \alpha I_M \right)^{-1} H^* \end{aligned}$$

Damit ist (A.5) bestätigt. Die verallgemeinerte Form nach (A.7) wird insbesondere für reale Systeme interessant, bei denen die Varianz des Rauschens nicht mehr an allen Empfangsantennen identisch angenommen werden darf. Dort hängt sie unter anderem auch von den verwendeten elektronischen Bauteilen ab und muss im Einzelfall gemessen werden.

A.3 Beweis für reelle \tilde{h}_{jj} in Gleichung (3.87)

Jetzt wird bewiesen, dass \tilde{h}_{jj} in (3.87) reell ist¹.

Beweis. \tilde{h}_{ij} ist das j -te Element von $\tilde{\mathbf{h}}_i$. Mit $i = j$ folgt aus (3.85)

$$\tilde{\mathbf{h}}_j = \mathbf{w}_j H \quad . \quad (\text{A.8})$$

Das j -te Element dieses Vektors lautet

$$\tilde{h}_{jj} = \mathbf{w}_j \mathbf{h}_j \quad . \quad (\text{A.9})$$

Mit (3.78) bekommt man

$$\tilde{h}_{jj} = \mathbf{h}_j^* \left(\underbrace{HH^* + \alpha I_N}_{=: F} \right)^{-1} \mathbf{h}_j \quad .$$

Es ist leicht überprüfbar, dass Matrix F hermitesch ist, weil HH^* und I_N hermitesch sind, und hermitesche Matrizen eine Gruppe bezüglich der Addition bilden. Matrix F^{-1} ist ebenfalls hermitesch, weil hermitesche Matrizen auch eine Gruppe bezüglich der Inversion bilden. Damit erhält man

$$\tilde{h}_{jj} = \mathbf{h}_j^* F^{-1} \mathbf{h}_j \quad . \quad (\text{A.10})$$

Wendet man

Satz 4. *Eine Matrix F^{-1} ist dann und nur dann hermitesch, wenn $\mathbf{h}_j^* F^{-1} \mathbf{h}_j$ für jedes beliebige komplexwertige \mathbf{h}_j reell ist [26, 28].*

auf diese Gleichung an, ist der Beweis erbracht. □

¹Wir erinnern uns daran, dass \tilde{h}_{jj} das j -te Diagonalelement von \tilde{H} ist.

A.4 Bestimmung der optimalen Detektionsreihenfolge

In diesem Anhang wird die optimale Detektionsreihenfolge über den kleinsten quadratischen Fehler hergeleitet. Ausgangspunkt ist der gesendete Vektor \mathbf{s} und der detektierte Symbolvektor nach (3.84) (oder (3.35) für ZF). Um die optimale Detektionsreihenfolge zu bestimmen, wird in jedem Detektionsschritt μ derjenige Index $j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}$ gesucht, für den der mittlere quadratische Fehler $E\{|s_j - y_j|^2\} = E\{(s_j - y_j)(s_j - y_j)^*\}$ minimal wird² (siehe dazu auch [42, 55–57]). Die folgende Herleitung wird für die (allgemeinere) MMSE-Detektion durchgeführt und anschließend auf den ZF-Fall übertragen.

Nehmen wir zunächst einmal an, dass das Symbol gesucht wird, welches als allererstes detektiert werden soll. Es sind also in der Kanalmatrix oder im Sendevektor noch keine Elemente virtuell zu Null gesetzt worden (vgl. Kapitel 3.2 und 3.4). Dazu berechnet man

$$\begin{aligned}
 & E\{(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{r})(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{r})^*\} \\
 = & E\{(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{r})(\mathbf{s}^* - \mathbf{r}^*\mathbf{W}^*)\} \\
 = & \underbrace{E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^*\}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{E\{\mathbf{s}\mathbf{r}^*\mathbf{W}^*\}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{E\{\mathbf{W}\mathbf{r}\mathbf{s}^*\}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{E\{\mathbf{W}\mathbf{r}\mathbf{r}^*\mathbf{W}^*\}}_{\textcircled{4}}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Unter der Voraussetzungen (3.71), (2.20), mit den Bedingungen, dass das Sendesignal unabhängig ist und dass das Rauschen ebenfalls unabhängig und darüber hinaus mittelwertfrei ist, wird

$$\textcircled{1} = E_s I_M \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} & = E\{\mathbf{s}\mathbf{r}^*\mathbf{W}^*\} \\
 & = E\{\mathbf{s}(\mathbf{s}^*\mathbf{H}^* + \mathbf{n}^*)\mathbf{W}^*\} \\
 & = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^*\mathbf{H}^*\mathbf{W}^*\} + \underbrace{E\{\mathbf{s}\mathbf{n}^*\mathbf{W}^*\}}_{=0} \\
 & = E_s I_M E\{\mathbf{H}^*\mathbf{W}^*\}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} & = E\{\mathbf{W}\mathbf{r}\mathbf{s}^*\} \\
 & = E\{\mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})\mathbf{s}^*\} \\
 & = E\{\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{s}\mathbf{s}^*\} + \underbrace{E\{\mathbf{W}\mathbf{n}\mathbf{s}^*\}}_{=0} \\
 & = E_s I_M E\{\mathbf{W}\mathbf{H}\}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

²Durch die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers wird das SNR maximiert und die BER minimiert [55].

$$\begin{aligned}
\textcircled{4} &= E \{ W \mathbf{r} \mathbf{r}^* W^* \} \\
&= E \left\{ W (H \mathbf{s} + \mathbf{n}) (\mathbf{s}^* H^* + \mathbf{n}^*) W^* \right\} \\
&= E \{ W H \mathbf{s} \mathbf{s}^* H^* W^* \} + \underbrace{E \{ W H \mathbf{s} \mathbf{n}^* W^* \}}_{=0} + \underbrace{E \{ W \mathbf{n} \mathbf{s}^* H^* W^* \}}_{=0} + E \{ W \mathbf{n} \mathbf{n}^* W^* \} \\
&= E_s I_M E \{ W H H^* W^* \} + 2 \sigma_n^2 I_M E \{ W W^* \} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Setzt man (A.12) bis (A.15) in (A.11) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned}
&E \left\{ \|\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 \right\} \\
&= E_s I_M - E_s I_M E \{ H^* W^* \} - E_s I_M E \{ W H \} + E_s I_M E \{ W H H^* W^* \} \\
&\quad + 2 \sigma_n^2 I_M E \{ W W^* \} \\
&= E_s \left(I_M - E \{ H^* W^* \} - E \{ W H \} + E \{ W H H^* W^* \} \right) + 2 \sigma_n^2 I_M E \{ W W^* \} \\
&= E_s E \{ I_M - H^* W^* - W H + W H H^* W^* \} + 2 \sigma_n^2 I_M E \{ W W^* \} \\
&= E_s E \left\{ (I_M - W H) (I_M - W H)^* \right\} + 2 \sigma_n^2 I_M E \{ W W^* \} \\
&= \underbrace{E_s \text{diag} \left((I_M - W H) (I_M - W H)^* \right) I_M}_{=: E} + 2 \sigma_n^2 \text{diag} (W W^*) I_M \quad . \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist wegen der besonderen Struktur der Zeilen der Matrix W möglich, bei denen nach (3.124) stets ein Faktor $\mathbf{h}_{d_\mu}^*$ enthalten ist, der bei den Matrixmultiplikationen für die notwendige Unkorreliert- und Mittelwertfreiheit sorgt. $\text{diag}(A)$ ist ein Zeilenvektor, der die Diagonalelemente der Matrix A enthält. Die Fehlermatrix

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

aus (A.16) ist eine $M \times M$ -Diagonalmatrix. Ihre M Diagonalelemente $\varepsilon_j = E \left\{ |s_j - y_j|^2 \right\}$ ($j = 1, \dots, M$) geben den quadratischen Fehler bei der Detektion der M Sendesymbole an. Um die optimale Detektionsreihenfolge zu bestimmen, sucht man also in diesem ersten Detektionsschritt dasjenige heraus, dessen ε_j am kleinsten ist.

Für ZF ist nach (3.32) $W = H^\dagger$ und damit nach (3.28) $W H = I_M$. Aus diesem Grund entfällt der erste Term in (A.16). Der zweite Term wird im Falle von ZF mit (3.32)

$$2 \sigma_n^2 \text{diag} (W W^*) I_M = 2 \sigma_n^2 \text{diag} \left(H^\dagger (H^\dagger)^* \right) I_M \tag{A.18}$$

und es bleibt ohne Berücksichtigung konstanter Faktoren lediglich die Suche nach dem kleinsten Diagonalelement in $H^\dagger (H^\dagger)^*$ übrig. Dies ist allerdings völlig identisch mit der

Suche nach derjenigen Zeile der Pseudoinversen, welche die kleinste Norm aufweist. Somit ist das Vorgehen in Kapitel 3.2.3 gerechtfertigt und verifiziert.

Bei der MMSE-Detektion ist $WH \neq I_M$. Gleichung (A.16) bleibt allerdings weiterhin gültig und erlaubt auf diese Weise die Bestimmung der optimalen Detektionsreihenfolge.

Sieht man sich ein einzelnes Diagonalelement ε_j ($j = 1, \dots, M$) der Fehlermatrix E an, so erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= E_s \left| 1 - \tilde{h}_{jj} \right|^2 + E_s \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M \left| \tilde{h}_{jl} \right|^2 + 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^N |w_{ji}|^2 \\ &= E_s \left(1 - \tilde{h}_{jj} \right)^2 + \sigma_{\text{ISVI},j}^2 + \sigma_{\text{AWGN},j}^2 . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Die Umformung des ersten Terms ist möglich, weil \tilde{h}_{jj} reell ist (siehe Anhang A.3). Damit ist ε_j insgesamt reell, wie es auch sein muss, da es sich um einen Erwartungswert einer reellen Größe handelt.

Dies gilt also für den ersten Detektionsschritt. Für die optimale Detektionsreihenfolge der weiteren Symbole schließen sich die nun folgenden Überlegungen an. Bei der Anwendung der sequentiellen Symbolauslöschung nach Kapitel 3.2 und 3.4 verändert sich das MIMO-System virtuell, indem bereits detektierte Symbole subtrahiert werden. Für die Suche nach der optimalen Detektionsreihenfolge muss man deshalb auf die in Kapitel 3.2.2 eingeführten Indexmengen zurückgreifen. Zusätzlich müssen bei der Berechnung sämtliche Varianzen der auftretenden Störterme (detektionsgefiltertes Rauschen, Intrasymbolvektorinterferenz und die Störung durch falsche Symbolauslöschung) berücksichtigt werden. Grundlage ist (3.99), in der sämtliche Störungen und Indexmengen berücksichtigt sind.

Für den μ -ten Detektionsschritt sucht man dasjenige Symbol s_{d_μ} ($d_\mu \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{d_\mu}$), für das

$$\varepsilon_{d_\mu} = E_s \left(1 - \tilde{h}_{d_\mu d_\mu} \right)^2 + \sigma_{\text{SAL},d_\mu}^2 + \sigma_{\text{ISVI},d_\mu}^2 + \sigma_{\text{AWGN},d_\mu}^2 \quad (\text{A.20})$$

minimal wird. Dabei ist

$$\sigma_{\text{SAL},d_\mu}^2 \stackrel{(\text{A.39})}{=} \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j | y_j \right\} , \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_{\text{ISVI},d_\mu}^2 \stackrel{(3.91)}{=} E_s \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \quad (\text{A.22})$$

(unter Einführung der Indexmengenschreibweise) und

$$\sigma_{\text{AWGN},d_\mu}^2 \stackrel{(3.38)}{=} 2\sigma_n^2 \cdot \sum_{i=1}^N |w_{ji}|^2 = 2\sigma_n^2 \cdot \|\mathbf{w}_j\|^2 \quad (\text{A.23})$$

Gleichung (A.20) ist sofort plausibel. Die hinteren drei Terme sind die Varianzen der verschiedenen auftretenden Störterme. Der erste Term beschreibt die Abweichung des Post-Detektions-Kanalkoeffizienten vom Idealwert 1. ZF ist auch hier ein näherungsweise Sonderfall der MMSE-Berechnung. Für ZF ist die Post-Detektions-Kanalmatrix eine Einheitsmatrix, und es gilt

$$\tilde{h}_{lj} = \delta_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (\text{A.24})$$

Damit wird $\sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 = 0$ und es bleibt

$$\varepsilon_{d_\mu} = \sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{AWGN}, d_\mu}^2 \quad (\text{A.25})$$

übrig. Ohne die Berücksichtigung der durch falsche Symbolauslöschung hervorgerufenen Störung ($\sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 = 0$) bleibt das bereits aus Kapitel 3.2.3 bekannte Ergebnis übrig.

Bei der Herleitung wurde für (A.12) bis (A.15) $L_a(x_k^j) = 0 \forall j, k$ vorausgesetzt. Die Erweiterung auf vorhandene a priori Information ist jedoch leicht möglich. Die einzige Stelle, an der diese Information berücksichtigt werden muss, ist die Signalenergie. Und zwar muss die mittlere Signalenergie E_s für jedes Symbol durch die jeweilige Varianz $\sigma_{s,j}^2$ ersetzt werden:

$$\sigma_{s,j}^2 = \text{var} \{s_j\} , \quad (\text{A.26})$$

wobei die Varianz gemäß (3.90) berechnet wird. Das bedeutet, $\sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2$ wird gemäß der allgemeinen Form (3.89) berechnet. Unter Berücksichtigung der Auswirkungen auf den ersten Term von (A.20) ergibt sich schließlich

$$\varepsilon_{d_\mu} = \sigma_{s, d_\mu}^2 \left(1 - \tilde{h}_{d_\mu d_\mu}\right)^2 + \sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{ISVI}, d_\mu}^2 + \sigma_{\text{AWGN}, d_\mu}^2 . \quad (\text{A.27})$$

A.5 Berechnung der Varianz der durch falsche Symbolauslöschung (SAL) hervorgerufenen Störung

Ausgangspunkt ist (3.100)

$$\sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) , \quad (\text{A.28})$$

wobei zunächst nur die Varianz von einem Term

$$\tilde{h}_{d_\mu j} (s_j - \hat{s}_j) \quad (\text{A.29})$$

der Summe berechnet wird. $\tilde{h}_{d_\mu j}$ ist dem Empfänger als diskrete Realisierung bekannt. Es bleibt also noch $s_j - \hat{s}_j$ übrig. Diese Größe ist unbekannt. Es wird daher die bedingte Varianz

$$\text{var} \{s_j - \hat{s}_j | y_j\} = \text{E} \left\{ |s_j - \hat{s}_j|^2 | y_j \right\} - \left| \text{E} \{s_j - \hat{s}_j | y_j\} \right|^2 \quad (\text{A.30})$$

berechnet (siehe auch [42]). Die Erwartungswerte müssen über alle Punkte des verwendeten Konstellationsdiagramms gebildet werden. Dabei werden die Punkte entsprechend ihrer angenommenen bzw. errechneten Auftrittswahrscheinlichkeit gewichtet. Es folgt

$$\mathbb{E} \left\{ s_j - \hat{s}_j | y_j \right\} = \sum_{l=0}^{2^Q-1} (s^{(l)} - \hat{s}_j) p(s^{(l)} | y_j) \quad (\text{A.31})$$

und

$$\mathbb{E} \left\{ |s_j - \hat{s}_j|^2 | y_j \right\} = \sum_{l=0}^{2^Q-1} |s^{(l)} - \hat{s}_j|^2 p(s^{(l)} | y_j) \quad . \quad (\text{A.32})$$

Dabei ist $p(s^{(l)} | y_{d_\mu})$ die Wahrscheinlichkeit, dass $s^{(l)}$ gesendet wurde, wenn y_{d_μ} empfangen wurde. Unter Anwendung des Satzes von Bayes und des Satzes der vollständigen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$p(s^{(l)} | y_j) = \frac{p(y_j | s^{(l)}) P(s^{(l)})}{\sum_{k=0}^{2^Q-1} p(y_j | s^{(k)}) P(s^{(k)})} \quad . \quad (\text{A.33})$$

$P(s^{(l)})$ ist die Auftrittswahrscheinlichkeit des Symbols $s^{(l)}$. Ohne a priori Wissen nimmt man hier eine Gleichverteilung

$$P(s^{(l)}) = \frac{1}{2^Q} \quad (\text{A.34})$$

an. Wenn in späteren Iterationen³ jedoch a priori Information der Bits in Form von L -Werten zur Verfügung stehen, kann die Auftrittswahrscheinlichkeit wegen der durch den Interleaver hergestellten Unabhängigkeit aufeinander folgender Bits durch

$$P(s^{(l)}) = \prod_{k=0}^{Q-1} P(x_k = b_k) \Big|_{\text{map}\{b_0 \dots b_{Q-1}\} = s^{(l)}} \quad (\text{A.35})$$

berechnet werden. Dabei ist $P(x_k = b_k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Bit x_k den Wert b_k annimmt und $b_0 \dots b_{Q-1}$ ist die Bitfolge, die durch das verwendete Konstellationsdiagramm \mathcal{A} auf $s^{(l)}$ abgebildet wird. Die Umrechnung von L -Werten (L) auf die Wahrscheinlichkeit, dass das Bit eine 1 ist, geschieht mit

$$P(b = 1) = \frac{\tanh\left(\frac{L}{2}\right) + 1}{2} \quad . \quad (\text{A.36})$$

Das heißt,

$$\begin{aligned} P(b = 1) &\rightarrow 1 \quad \text{für } L \rightarrow +\infty \\ P(b = 1) &= \frac{1}{2} \quad \text{für } L = 0 \\ P(b = 1) &\rightarrow 0 \quad \text{für } L \rightarrow -\infty \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

³Diese werden ab Kapitel 4 behandelt.

Und schließlich ist bei Anwendung der üblichen (jedoch auch näherungsweisen) Gauß-Annahme [51]

$$p\left(y_j \mid s^{(l)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_j} \cdot \exp\left(-\frac{|y_j - \tilde{h}_{jj}s^{(l)}|^2}{\tilde{\sigma}_j^2}\right) . \quad (\text{A.38})$$

Der konstante Vorfaktor verschwindet bei der Berechnung von (A.33), da er sowohl im Nenner als auch im Zähler auftritt. $\tilde{\sigma}_{d_\mu}^2$ ist die Varianz der Störterme bei der Detektion des Symbols y_{d_μ} . Damit lässt sich nun die gesuchte Varianz berechnen, indem man alle Terme „rückwärts“ bis in (A.28) einsetzt. Das Ergebnis lautet

$$\sigma_{\text{SAL}, d_\mu}^2 = \sum_{j \in \mathcal{D}_{d_\mu}} \left| \tilde{h}_{d_\mu j} \right|^2 \text{var} \left\{ s_j - \hat{s}_j \mid y_j \right\} , \quad (\text{A.39})$$

wobei die Varianz nach (A.30) berechnet wird und hier nur aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingesetzt wurde. Bei der Berechnung treten Exponentialfunktionen auf. Bei der numerischen Berechnung der Varianz in den durchgeführten Simulationen hat sich herausgestellt, dass diese Berechnung im Logarithmusbereich durchgeführt werden sollte, um numerische Instabilitäten zu vermeiden.

A.5.1 Suboptimum beim „uncodierten“ System

Neben den numerischen Instabilitäten bringt die Berechnung der Varianz der Symbolauslöschung noch einen weiteren inhärenten Nachteil mit sich. Die Berechnung der Varianz findet im MIMO-Detektor vor dem MAP-Demapping statt. Also befinden wir uns zwischen den beiden in den Abbildungen 2.1 und 2.3 mit ① und ② bezeichneten Schnittstellen und damit innerhalb eines uncodierten Systems. Für die Varianz der Symbolauslöschung hat dies die folgende Konsequenz:

Aus dem detektierten Symbol y_j wird der Schätzwert \hat{s}_j gewonnen, der nicht in allen Fällen mit dem tatsächlich gesendeten Symbol s_j übereinstimmt. Die Varianz der Symbolauslöschung nimmt nun (korrekterweise) zu, wenn der Abstand $y_j - \hat{s}_j$ größer wird, weil die Schätzung beziehungsweise Quantisierung mit einer größeren Unsicherheit behaftet ist. Die Varianz nimmt aber nur so lange zu, bis y_j eine Entscheidungsschwelle im verwendeten Konstellationsdiagramm erreicht. Wenn sich y_j dann wieder auf einen (anderen) Konstellationspunkt zu bewegt, wird die Varianz wieder kleiner. Der Grund liegt in der Tatsache, dass der Detektor nicht weiß, welcher Konstellationspunkt tatsächlich gesendet wurde und damit als korrekt angesehen werden soll. Darum nimmt man mit oben aufgeführter Rechnung an, dass derjenige Konstellationspunkt, der den geringsten Abstand zu y_j besitzt, auch gesendet wurde. Dieser Abstand wird über die Varianz als Unsicherheit der Symbolauslöschung betrachtet. Die berechnete Unsicherheit kann deshalb geringer ausfallen als sie tatsächlich ist. Diese „uncodierte“ Berechnung führt deshalb im codierten System zu einer erhöhten BER.

Diesen Effekt kann man durch vorhandenes a priori Wissen über die übertragenen Bits reduzieren, allerdings nicht vollständig vermeiden. Das bedeutet, mit zunehmender Anzahl an Iterationen wird die Berechnung immer genauer (was ja auch dem Gedanken iterativer Berechnungen entspricht).

Trotzdem wird die Unsicherheit der Symbolauslöschung (mindestens teilweise) korrekt berücksichtigt und führt auch ohne a priori Wissen insgesamt zu einer Verringerung der Bitfehlerhäufigkeit. Nachteile hinsichtlich der Fehlerwahrscheinlichkeit ergeben sich durch die Berücksichtigung nicht. Im Gegenteil führt eine Nichtbeachtung im codierten System zu einer drastischen Erhöhung der Bitfehlerhäufigkeit, wie die Simulationsergebnisse in Kapitel 3.4 zeigen.

Literaturverzeichnis

- [1] Í. E. Telatar, *Capacity of multi-antenna Gaussian channels*, *Bell Labs Internal Technical Memo*, Juni/Okttober 1995, Nachdruck: *European Transactions on Telecommunications*, Band 10, Nr. 6, Seiten 585-595, November/Dezember 1999.
- [2] G. J. Foschini, *Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas*, *Bell Labs Technical Journal*, Band 1, Nr. 2, Seiten 41–59, Herbst 1996.
- [3] J. Hagenauer, *Soft-in/soft-out, the benefits of using soft values in all stages of digital receivers*, in *Proceedings of the 3rd International Workshop on Digital Signal Processing Techniques for Space Communications 1992*, Noordwijk, Niederlande, September 1992.
- [4] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi und F. Pollara, *A soft-input soft-output APP module for iterative decoding of concatenated codes*, *IEEE Communications Letters*, Band 1, Nr. 1, Seiten 22–24, Januar 1997.
- [5] W. C. Jakes Jr. (Herausgeber), *Microwave Mobile Communications*, John Wiley & Sons, Inc., 1974, ISBN 0-471-43720-4.
- [6] M. Pätzold, *Mobilfunkkanäle - Modellierung, Analyse und Simulation*, Nachrichtentechnik, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1999, ISBN 3-528-03892-6.
- [7] S. M. Alamouti, *A simple transmit diversity technique for wireless communications*, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Band 16, Nr. 8, Seiten 1451–1458, Oktober 1998.
- [8] A. J. Paulraj, D. A. Gore, R. U. Nabar und H. Bölcskei, *An overview of MIMO communications - a key to gigabit wireless*, *Proceedings of the IEEE*, Band 92, Nr. 2, Seiten 198–218, Februar 2004.
- [9] G. Bauch und J. Hagenauer, *Smart versus dumb antennas*, in *4th International ITG Conference on Source and Channel Coding (SCC)*, Seiten 131–138, Berlin, 28. bis 30. Januar 2002.

- [10] D.-S. Shiu, G. J. Foschini, M. J. Gans und J. M. Kahn, *Fading correlation and its effect on the capacity of multi-element antenna systems*, *IEEE Transactions on Communications*, Band 48, Nr. 3, Seiten 502–512, März 2000.
- [11] T. L. Marzetta, *BLAST training: Estimating channel characteristics for high capacity space-time wireless*, in *37th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Monticello, Illinois, USA, 22. bis 24. September 1999.
- [12] B. Hassibi und B. M. Hochwald, *How much training is needed in multiple-antenna wireless links?*, *IEEE Transactions on Information Theory*, Band 49, Nr. 4, Seiten 951–963, April 2003.
- [13] J. Baltersee, G. Fock und H. Meyr, *Achievable rate of MIMO channels with data-aided channel estimation*, in *IEEE Information Theory Workshop*, Seiten 150–152, Cairns, Australien, 2. bis 7. September 2001.
- [14] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Series in System Science, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965, ISBN 07-048448-1.
- [15] X. Li, H. Huang, G. J. Foschini und R. A. Valenzuela, *Effects of iterative detection and decoding on the performance of BLAST*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 2000*, Band 2, Seiten 1061–1066, San Francisco, Kalifornien, USA, 27. November bis 1. Dezember 2000.
- [16] C.-E. D. Sterian, *Exact formulas for computing the energy of „square“ and „cross“ two-dimensional rectangular signal constellations*, *European Transactions on Telecommunications*, Band 8, Nr. 6, Seiten 547–549, November/Dezember 1997.
- [17] S. ten Brink, J. Speidel und R.-H. Yan, *Iterative demapping and decoding for multilevel modulation*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 1998*, Band 1, Seiten 579–584, Sydney, Australien, 8. bis 12. November 1998.
- [18] P. Robertson, E. Villebrun und P. Hoeher, *A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the Log domain*, in *IEEE International Conference on Communications (ICC) 1995*, Band 2, Seiten 1009–1013, Seattle, Washington, USA, 18. bis 22. Juni 1995.
- [19] S. ten Brink, *Design of Concatenated Coding Schemes based on Iterative Decoding Convergence*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2001, Shaker-Verlag Aachen, ISBN 3-8322-0684-1.
- [20] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek und J. Raviv, *Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate*, *IEEE Transactions on Information Theory*, Band 20, Seiten 284–287, März 1974.

- [21] S. B aro, J. Hagenauer und M. Witzke, *Iterative detection of MIMO transmission using a list-sequential (LISS) detector*, in *IEEE International Conference on Communications (ICC) 2003*, Band 4, Seiten 2653–2657, Anchorage, Alaska, USA, 11. bis 15. Mai 2003.
- [22] Y. G. Li, J. H. Winters und N. R. Sollenberger, *Signal detection for MIMO-OFDM wireless communications*, in *IEEE International Conference on Communications (ICC) 2001*, Band 10, Seiten 3077–3081, Helsinki, Finnland, 11. bis 15. Juni 2001.
- [23] A. M. Tonello, *MIMO MAP equalization and turbo decoding in interleaved space-time coded systems*, *IEEE Transactions on Communications*, Band 51, Nr. 2, Seiten 155–160, Februar 2003.
- [24] W.-J. Choi und J. M. Cioffi, *Multiple input/multiple output (MIMO) equalization for space-time block coding*, in *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (PACRIM) 1999*, Seiten 341–344, Victoria, B.C., Kanada, 23. bis 25. August 1999.
- [25] P. Lancaster und M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Computer science and applied mathematics, Academic Press, San Diego, zweite Auflage, 1985, ISBN 0-12-435560-9.
- [26] M. Brookes, *Matrix reference manual*, Internet: <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html>, Imperial College, London, UK.
- [27] T. Kailath, A. H. Sayed und B. Hassibi, *Linear Estimation*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2000, ISBN 0-13-022464-2.
- [28] R. A. Horn und C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK, 1985, ISBN 0-521-38632-2.
- [29] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer-Verlag, New York, zweite Auflage, 1994, ISBN 0-387-94173-8.
- [30] R. Zurm uhl und S. Falk, *Matrizen und ihre Anwendungen 1*, Springer-Verlag, Berlin, sechste Auflage, 1992, ISBN 3-540-53944-1.
- [31] A. Ben-Israel und T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Pure and applied mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, ISBN 0-471-06577-3.
- [32] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill Series in electrical and computer engineering. Communications and signal processing., WCB/McGraw-Hill, dritte Auflage, 1995, ISBN 0-07-051726-6.

- [33] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden und R. A. Valenzuela, *V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel*, in *URSI International Symposium on Signals, Systems, and Electronics (ISSSE) 1998*, Seiten 295–300, Pisa, Italien, 29. September bis 2. Oktober 1998.
- [34] G. D. Golden, G. J. Foschini, R. A. Valenzuela und P. W. Wolniansky, *Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture*, *ELECTRONIC LETTERS*, Band 35, Nr. 1, Seiten 14–15, 7. Januar 1999.
- [35] S. B aro, G. Bauch, A. Pavlic und A. Semmler, *Improving BLAST performance using space-time block codes and turbo decoding*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 2000*, Band 2, Seiten 1067–1071, San Francisco, Kalifornien, USA, 27. November 27 bis 1. Dezember 2000.
- [36] M. Witzke, S. B aro, F. Schreckenbach und J. Hagenauer, *Iterative detection of MIMO signals with linear detectors*, in *36th Asilomar Conference On Signals, Systems And Computers (ACSSC) 2002*, Band 1, Seiten 289–293, Pacific Grove, Kalifornien, USA, 3. bis 6. November 2002.
- [37] D. Efinger, *Comparison of MIMO detection algorithms*, Infotech Seminar, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 27. August 2003, Nummer 2065Sem.
- [38] A. Boronka und J. Speidel, *A low complexity MIMO system based on BLAST and iterative anti-Gray-demapping*, in *The 14th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC) 2003*, Band 2, Seiten 1400–1404, Peking, China, 7. bis 10. September 2003.
- [39] A. Boronka, D. Efinger und J. Speidel, *Improving MIMO detection by L-value analysis and adaptive threshold-based cancellation*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 2003*, Band 4, Seiten 2099–2103, San Francisco, Kalifornien, USA, 1. bis 5. Dezember 2003.
- [40] F. Klingler, *Fehlerfortpflanzung bei sequentieller Signaldecodierung in einem Mehrantennensystem*, Studienarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 25. August 2002, Nummer 1992S.
- [41] D. Efinger, *Untersuchung von L-Werten in einem codierten Mehrantennen (MIMO)-Übertragungssystem und Optimierung der MIMO-Detektionsstufe*, Studienarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 19. Mai 2003, Nummer 2043S.
- [42] A. Boronka, T. Rankl und J. Speidel, *Iterative nonlinear detection of MIMO signals using an MMSE-OSIC detector and adaptive cancellation*, in *5th International ITG Conference on Source and Channel Coding (SCC) 2004*, Seiten 17–24, Erlangen, 14. bis 16. Januar 2004.

- [43] N. S. Muhammad, *Investigation of iterative MIMO detection by means of EXIT-charts*, Diplomarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 7. Januar 2004, Nummer 2056D.
- [44] I. Land und S. Gligorević, *Computation of symbol-wise mutual information in transmission systems with LogAPP decoders and application to EXIT charts*, in *5th International ITG Conference on Source and Channel Coding (SCC) 2004*, Seiten 195–202, Erlangen, 14. bis 16. Januar 2004.
- [45] A. Boronka und J. Speidel, *Analysis and results on optimized MIMO detection with threshold-based adaptive cancellation*, in *IEEE Semiannual Vehicular Technology Conference (VTC) 2004 Spring*, Mailand, Italien, 17. bis 19. Mai 2004.
- [46] J. Baumann, *Optimierung von MIMO Detektionsalgorithmen durch gleichzeitige Berücksichtigung von Zuverlässigkeits- und Fehlerfortpflanzungsinformationen*, Studienarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 31. Oktober 2003, Nummer 2058S.
- [47] B. Hassibi, *An efficient square-root algorithm for BLAST*, in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICSAAP) 2000*, Seiten II737–II740, Istanbul, Türkei, 5. bis 9. Juni 2000.
- [48] B. M. Hochwald und S. ten Brink, *Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel*, *IEEE Transactions on Communications*, Band 51, Nr. 3, Seiten 389–399, März 2003.
- [49] X. Li, H. C. Huang, A. Lozano und G. J. Foschini, *Reduced-complexity detection algorithms for systems using multi-element arrays*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 2000*, Band 2, Seiten 1072–1076, San Francisco, Kalifornien, USA, 27. November bis 1. Dezember 2000.
- [50] N. S. Muhammad, *Analytische Berechnung von Kenngrößen des EXIT-Charts und Optimierung von QAM-Signalknoten*, in *3. Diskussionsitzung der ITG Fachgruppe Angewandte Informationstheorie*, Abteilung für Telekommunikationstechnik und Angewandte Informationstheorie, Universität Ulm, 16. April 2004.
- [51] W.-J. Choi, K.-W. Cheong und J. M. Cioffi, *Iterative soft interference cancellation for multiple antenna systems*, in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference WCNC 2000*, Band 1, Seiten 304–309, Chicago, Illinois, USA, 23. bis 28. September 2000.
- [52] M. Witzke, S. Bärö und J. Hagenauer, *Iterative detection of generalized coded MIMO signals using a widely linear detector*, in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM) 2003*, Band 4, Seiten 1821–1825, San Francisco, Kalifornien, USA, 1. bis 5. Dezember 2003.

- [53] F. Böhme, *Optimierung von MIMO-Detektionsalgorithmen durch adaptive L-wert-basierte Signalverarbeitung*, Diplomarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 15. Dezember 2003, Nummer 2057D.
- [54] C. Berrou, A. Glavieux und P. Thitimajshima, *Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes*, in *IEEE International Conference on Communications (ICC) 1993*, Band 2, Seiten 1064–1070, Genua, Italien, 23. bis 26. Mai 1993.
- [55] R. Cupo, G. Golden, C. Martin, K. Sherman, N. Sollenberger, J. Winters und P. Wolniansky, *A four-element adaptive antenna array for IS-136 PCS base stations*, in *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC) 1997*, Band 3, Seiten 1577–1581, Phoenix, Arizona, USA, 4. bis 7. Mai 1997.
- [56] T. Rankl, *Iterative MMSE- und OSIC-MMSE-Entzerrung in codierten MIMO-Systemen*, Diplomarbeit, Institut für Nachrichtenübertragung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 47, 70569 Stuttgart, 28. Juli 2003, Nummer 2053D.
- [57] A. van Zelst, *Extending the capacity of next generation wireless LANs using space division multiplexing combined with OFDM*, Diplomarbeit, Technische Universiteit Eindhoven, Faculty of Electrical Engineering, Section of Telecommunication Technology and Electromagnetics, Netherlands, 1999.